## Лекция №1
# КИНЕМАТИКА

### Кинематика материальной точки

Простейшим объектом, движение которого изучает классическая механика, является материальная точка. *Материальной точкой в механике называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.* Планеты, обращающиеся вокруг Солнца, можно считать материальными точками, поскольку размеры планет, сколь бы велики они ни были, все же очень малы по сравнению с их расстояниями до Солнца. Снаряд, выпущенный из орудия, также может быть принят за материальную точку.

Механика точки является основой для изучения механики вообще, так как произвольное тело можно разбить на малые связанные друг с другом макроскопические части, каждую из которых можно считать материальной точкой. В частности, *абсолютно твердым телом называют совокупность материальных точек, расстояния между которыми при движении тела остаются неизменными.* При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории. Поэтому часто в дальнейшем, пока речь не идет о вращении, движущуюся материальную точку мы будем называть телом.

### Радиус-вектор

*Тело, относительно которого определяется положение других тел, называется телом отсчета.* В качестве тела отсчета чаще всего используют Землю, с которой связывают прямоугольную *декартову систему координат* (рис. 1). Отрезки $x, y, z,$ отсекаемые на осях координат перпендикулярными к ним плоскостями, проходящими через точку $M$, называются *координатами точки* $M$.

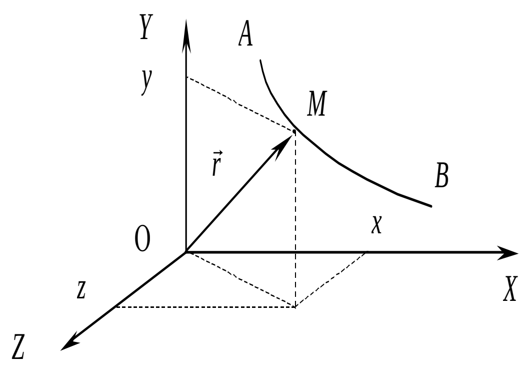
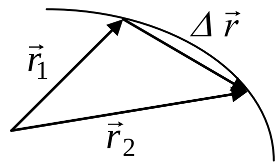



Рис.

Движение точки полностью описано, если известно ее положение в любой момент времени относительно выбранной системы координат. Положение материальной точки задается в пространстве тремя координатами (на плоскости - двумя) или вектором $\vec{r}$ (см. рис.). **Радиус-вектор** – *вектор проведенный из начала системы координат в данную точку.* Очевидно, что $\vec{r}$ – радиус-вектор. Чтобы описать движение материальной точки, необходимо найти три функции:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad \text{или} \qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

**Т р а е к т о р и е й** *называется совокупность последовательных положений точки, т.е. линия, которую она описывает в пространстве при своем движении* (на рис. 1 – это дуга *AB*).
Система уравнений (1) задает траекторию точки в п а р а м е т р и ч е с к о м в и д е , где в качестве параметра выступает время $t$.
**Путь** – *длина траектории.*
Заметим, что путь это скалярная физическая величина, т.е. величина, которая не имеет направления. Если известно, что материальная точка прошла путь равный 3 км, то мы все равно ничего не знаем о характере движения, т.е. материальная точка могла все время двигаться от нас и сейчас находится на расстоянии 3 км. Могла пройти некоторую дистанцию и вернуться к нам или вообще все время кружила вокруг нас.
Как правило, путь обозначают буквой $S$. Путь является не убывающей величиной зависящей от времени $S(t)$. Т.е. со временем путь либо остается неизменным, если тело покоилось, или увеличивается, если тело движется. Примером ситуации, в которой нас интересует путь, является показания пробега в автомобиле.
Другой величиной характеризующей движение является перемещение.
**Перемещение** – *векторная физическая величина равная разности двух радиус-векторов проведенных в первое и во второе положения*




$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Т.о. перемещение показывает, не только как далеко тело сдвинулось из точки 1 в точку 2, но и направление этого сдвига. При этом нам совершенно безразлична траектория движения, т.е. тело могло переместиться по прямой из точки 1 в точку 2, а могло из точки 1 отправиться на Луну, а затем в точку 2. Перемещение в обоих случаях будет одинаковым. Перемещение, как и путь, измеряется в SI в метрах

$$[\Delta\vec{r}] = [S] = \text{м} .$$

## Скорость.

**Скорость –** *характеристика быстроты изменения положения тела*.
Из определения скорости сразу следует, что если положение тела не меняется, то скорость равна нулю.
Если за время $\Delta t$ тело прошло путь $\Delta S$, то говорят, что тело двигалось со средней путево̉й скоростью $\text{v}_{\text{ср.пут.}}$

$$\text{v}_{\text{ср.пут.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Если за время $\Delta t$ тело совершило перемещение $\Delta\vec{r}$, то говорят, что тело двигалось со средней скоростью по перемещению $\vec{\text{v}}_{\text{ср.пер.}}$

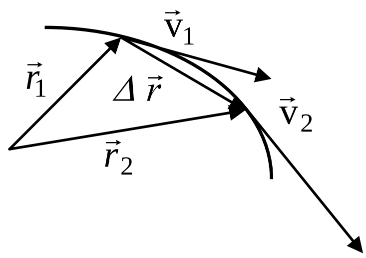
$$\vec{v}_{\text{ср.пер.}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Заметим, что путевая скорость является скаляром, тогда как скорость по перемещению вектором.

Устремим время $\Delta t \to 0$, тогда операция отношения (деления) заменится на операцию *производной*. В этом случае говорят о мгновенной скорости $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Так как за бесконечно малое время $dt$ вектор перемещения $d\vec{r}$ по модулю равен $dS$, т.е. $|d\vec{r}| = dS$, то $|\vec{v}_{\text{пер.}}| = v_{\text{пут.}}$ поэтому для мгновенных скоростей индекс указывающий на путь или перемещение опускают.




Примем без доказательства, что вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в каждой ее точке. Очевидно, что любая скорость измеряется в SI в метрах за секунду

$$[v_{\text{ср.пут.}}] = [\vec{v}_{\text{ср.пер.}}] = [\vec{v}] = м/с.$$

## Ускорение.

**Ускорение –** *характеристика быстроты изменения скорости тела.*

Из определения ускорения сразу следует, что если скорость тела не меняется, то ускорение равно нулю.

Если за время $\Delta t$ тело изменило свою скорость на $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, то говорят, что тело двигалось со средним ускорением $\vec{a}_{\text{ср}}$

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Предел отношения $\Delta\vec{v}$ к $\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ называется *ускорением*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t).$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ можно разложить (см. рис.) на две компоненты: $\vec{a}_\tau$, параллельную вектору $\vec{v}$, и $\vec{a}_n$ – перпендикулярную ему:

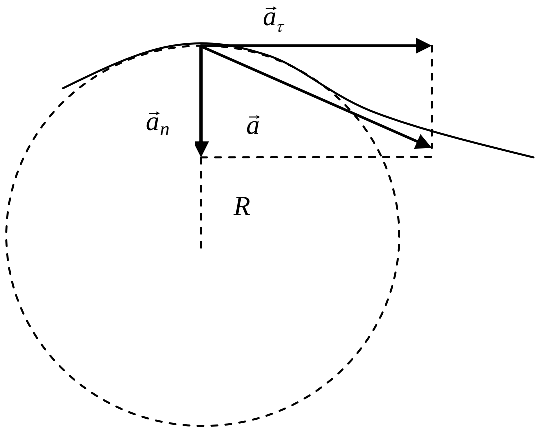
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Компонента $\vec{a}_\tau$ называется *тангенциальным ускорением* частицы и показывает быстроту изменения модуля ее скорости $|\vec{v}|$

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

Компонента $\vec{a}_n$ показывает изменение скорости частицы по направлению и называется *нормальным ускорением*, т.е. направленным по нормали к вектору скорости $\vec{\mathrm{v}}$. Можно показать, что нормальное ускорение определяется выражением

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R},$$




где $R$ – *радиус кривизны* траектории в какой-либо ее точке, $\mathrm{v}$ – модуль скорости частицы в этой точке.

*Радиус кривизны R равен радиусу окружности, касательной к траектории в данной точке* (рис). Поскольку радиус такой окружности изменяется при переходе от одной точки к другой, он называется *мгновенным радиусом кривизны* траектории.

Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен вдоль вектора $\vec{\mathrm{v}}$ если скорость увеличивается по модулю и в противоположную сторону – если скорость уменьшается. Вектор $\vec{a}_n$ всегда направлен по радиусу к центру кривизны (см. рис.).

Размерность ускорения непосредственно следует из определения

$$\left[\vec{a}_{\text{ср}}\right] = \frac{[\Delta\vec{\mathrm{v}}]}{[\Delta t]} = \frac{м/с}{с} = \frac{м}{с^2}.$$

**Простейшие примеры.**

Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением $a = const$ (равноускоренное движение). Найти зависимость координаты и скорости от времени при условии, что в начальный момент времени ее координата $x(0) = x_0$, а скорость $\upsilon(0) = \upsilon_0$.

Решение. В случае одномерного прямолинейного движения радиус-вектор $\vec{r}(t)$ заменяется на координату $x(t)$. Чтобы найти зависимость $x = x(t)$, воспользуемся выражениями

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \text{ и } a(t) = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Из первого выражения следует что $dx = \upsilon(t)dt$ или

$$x(t) = \int \upsilon(t)\,dt$$

Из второго - следует что $d\upsilon = a(t)dt$ или

$$\upsilon(t) = \int a(t)\,dt$$

Тогда, при $a = const$ имеем (из второго выражения)

$$\upsilon(t) = \int a \cdot dt = a\int dt = a \cdot t + c_1 = \upsilon_0 + a \cdot t,$$

где константа $c_1$ определяется из начальных условий $\upsilon(0) = \upsilon_0$.

Подставляя найденное выражение в $x(t) = \int \upsilon(t)\,dt$ получим

$$x(t)=\int \upsilon(t)\,dt=\int(\upsilon_0+a\cdot t)\,dt=\upsilon_0 t+\frac{a\cdot t^2}{2}+c_2$$

Константу $c_2$ находим из условия $x(0)=x_0$, тогда $c_2=x_0$ и мы получаем

$$x(t)=x_0+\upsilon_0 t+\frac{a t^2}{2}.$$

Поскольку $S(t)=x-x_0$ – пройденный путь, она приобретает вид

$$S(t)=\upsilon_0 t+\frac{a t^2}{2}.$$

При равноускоренном движении ($a=const$) среднее значение скорости есть

$$\upsilon_{cp}=\frac{s}{t}=\upsilon_0+\frac{a t}{2}==\frac{2\upsilon_0+a t}{2}=\frac{\upsilon_0+(\upsilon_0+a t)}{2}=\frac{\upsilon_0+\upsilon}{2}.$$

Рассматривая уравнение

$$\frac{s}{t}=\frac{\upsilon_0+\upsilon}{2}$$

совместно с уравнением $\upsilon-\upsilon_0=at$ находим $t=(\upsilon-\upsilon_0)/a$ и подставляем в первое

$$\frac{s}{(\upsilon-\upsilon_0)/a}=\frac{\upsilon_0+\upsilon}{2}$$

получим формулу, связывающую конечную и начальную скорости движения, ускорение и пройденный путь:

$$\upsilon^2-\upsilon_0^2=2as.$$

Запишем основные формулы прямолинейного равноускоренного (равнопеременного) движения

$$x(t)=x_0+\upsilon_0 t+\frac{at^2}{2},$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0+a\cdot t,$$

$$a=const.$$

Заметим, что константы $x_0,\upsilon_0,a$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Пример 2. Материальная точка движется равномерно и прямолинейно т.е. с постоянной скоростью $\upsilon=\upsilon_0=const$. Найти зависимость координаты от времени при условии, что в начальный момент времени ее координата $x(0)=x_0$.

Решение. Положив в предыдущем примере $a=0$ находим

$$x(t)=x_0+\upsilon_0 t.$$