# Лекция №2
# Кинематика вращательного движения

## Движение материальной точки по окружности

Рассмотрим обращение материальной точки $M$ по окружности радиуса $r$ (рис.1). В момент времени $t = 0$ она находилась в точке $A$. Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат к точке $M$, за время $t$ повернулся на угол $\varphi$. Из рисунка видно, что координаты точки:

$$x = r \cdot cos\varphi, \qquad (1а)$$

$$y = r \cdot sin\varphi. \qquad (1б)$$

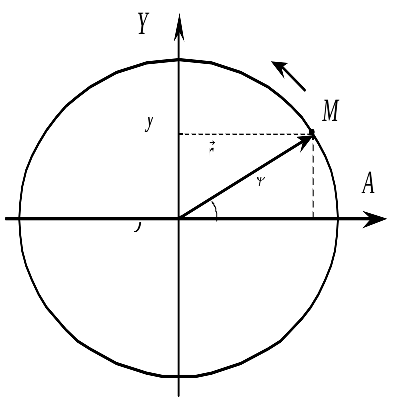


Рис.1

Модуль радиуса-вектора $r = |\vec{r}|$ и угол $\varphi$, который он составляет с осью $X$, называют *полярными координатами* точки, а соотношения (1) дают связь декартовых координат $x$ и $y$ с полярными. В нашем случае $r = const$ и положение точки $M$ на окружности определяется только одной полярной координатой – углом $\varphi$.

*Угловая скорость* $\omega$, с которой вращается радиус-вектор точки, равна производной $\varphi$ по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2)$$

Она измеряется в радианах в секунду, а размерность – секунда в минус первой степени

$$[\omega] = 1 / с = с^{-1}.$$

(Так происходит, потому что радианы это безразмерные величины, 1 *радиан* – центральный угол, длина стягивающей дуги которого равна радиусу).

*Угловое ускорение* $\varepsilon$, с которым вращается радиус-вектор, равно производной его угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (3)$$

Единица измерения углового ускорения – *радиан в секунду за секунду*, а размерность – секунда в степени минус 2

$$[\,\varepsilon\,] = \text{рад} / \text{с}^2 = \text{с}^{-2}.$$

Угол поворота $\varphi$ можно найти, если известна угловая скорость $\omega$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega\, dt\,, \tag{4}$$

а угловую скорость $\omega$ – по известному угловому ускорению $\varepsilon$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon\, dt\,, \tag{5}$$

где $\varphi_0$ и $\omega_0$ – константы интегрирования, равные соответственно углу поворота и угловой скорости в момент времени $t = 0$.

По аналогии с поступательным движением определим *среднюю угловую скорость* и *среднее угловое ускорение:*

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{7}$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ – соответственно приращение угла $\varphi$ и угловой скорости $\omega$ за промежуток времени $\Delta t$.

Обращение точки по окружности является равномерным, если ее скорость изменяется лишь по направлению, оставаясь постоянной по модулю. В этом случае тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = d\upsilon / dt = 0$, а нормальная $a_n = \upsilon^2 / r$. Она называется *центростремительным* ускорением (при этом радиус кривизны траектории $r$ равен радиусу окружности).

Поскольку угловая скорость равномерного вращения радиуса-вектора точки постоянна ($\omega = const$), из формулы (4) следует зависимость угла $\varphi$ от времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t\,, \tag{8}$$

где $\varphi_0$ – угол поворота в начальный момент времени.

Полагая для простоты $\varphi_0 = 0$, найдем отсюда угловую скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (\text{при } \varepsilon = 0). \qquad (9)$$

Пусть точка, равномерно движущаяся по окружности, за время *t* совершает $N$ оборотов. Тогда *число оборотов за единицу времени называется* *частотой* $\nu$ *ее обращения по окружности:*

$$\nu = \frac{N}{t}. \qquad (10)$$

*Периодом обращения материальной точки T называется время, за которое она совершает один оборот:*

$$T = \frac{t}{N}. \qquad (11)$$

Период и частота – взаимно обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (12)$$

Единица измерения периода [ $T$ ] = *c*, частоты [$\nu$] = 1/с (*оборот в секунду*).

Если точка совершила $N$ оборотов, то угол поворота ее радиуса-вектора $\varphi = 2\pi N$, а его угловая скорость $\omega = \varphi / t = 2\pi N / t$. Подставляя сюда $N/t$ из формулы (4.10), получим связь угловой скорости $\omega$ с частотой обращения $\nu$ и периодом $T$:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad (13)$$

Скорость точки $\upsilon$ при движении ее по окружности принято называть *линейной скоростью*, чтобы отличать ее от угловой скорости $\omega$, которую называют также *круговой частотой*. Совершая $N$ оборотов за время *t*, материальная точка проходит расстояние $s = 2\pi r \cdot N$ ($2\pi r$ – длина окружности). Тогда ее линейная скорость $\upsilon = s / t$, с учетом уравнений (10) и (13), выражается через угловую скорость:

$$\upsilon = \omega \cdot r. \qquad (14)$$

Эта формула справедлива и тогда, когда точка движется по окружности с ускорением. Дифференцируя (14) по времени при условии $r = const$, получим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r. \qquad (15)$$

Центростремительное ускорение $a_n$ также может быть выражено через угловую скорость:

$$a_n = \upsilon^2 / r = \omega^2 r. \tag{16}$$

Скорость точки $\vec{\upsilon}$, как и радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный к ней из центра окружности векторные величины. Ось вращения перпендикулярна обоим этим векторам и имеет определенное направление в пространстве. Чтобы обозначить это направление и связать указанные векторы, вводят понятия *аксиального вектора* и *векторного произведения* векторов.

## Векторное произведение векторов

(математическое отступление)

Скалярное умножение векторов, рассмотренное в предыдущей главе, дает скалярную величину. Теперь мы рассмотрим векторное умножение двух векторов, в результате которого получается новый вектор.

*Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости этих векторов и направлен в такую сторону, чтобы вращение от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути вокруг полученного вектора $\vec{c}$ происходило в ту же сторону, что и вращение по кратчайшему пути от оси $X$ к оси $Y$ вокруг оси $Z$* (рис.2).

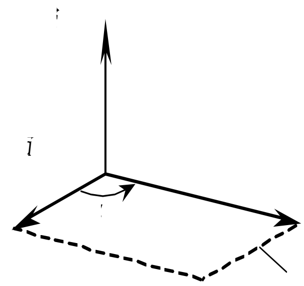

Рис.2

Из определения следует, что направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением движения правого винта в правой системе координат (см. рис.2).

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается косым крестом или квадратными скобками:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

Модуль вектора $\vec{c}$, по определению,

$$c = a\,b\sin\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\,),$$

поскольку площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $S = a\,b\sin\,\alpha$ ($\alpha$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

## Векторные выражения скорости и ускорения вращающейся точки

Поворот на бесконечно малый угол $d\varphi$ радиуса-вектора $\vec{r}$ точки, движущейся по окружности (см. рис.1), можно представить вектором $\overrightarrow{d\varphi}$, направленным вдоль оси вращения в ту сторону, куда движется винт, вращающийся по направлению движения точки. В правой системе координат вектор $\overrightarrow{d\varphi}$ направлен так, как показано на рис.3.

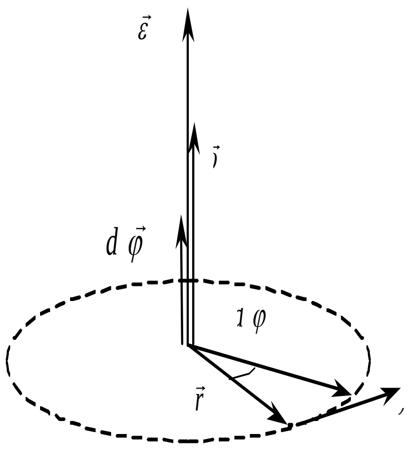


Рис.3

Угловую скорость вращения радиуса-вектора, определенную выше формулой (2), также можно представить в виде аксиального вектора, параллельного вектору $\overrightarrow{d\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{d\,t}. \qquad (17)$$

Скорость точки, как видно из рис.3, равна векторному произведению $\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, а ее модуль совпадает с выражением (14).

Так как $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}.$$

Можно показать, что вектор $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки в одну сторону со скоростью, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное, а вектор $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ направлен по радиусу к оси вращения. Поэтому первый из них есть вектор вращательного т.е. тангенциального ускорения,

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}$$

а второй – центростремительного (нормального) ускорения точки:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}.$$

Центростремительному ускорению $a_n$ можно придать другой вид:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}),$$

где мы использовали формулу «бац» минус «цаб».

В случае, если $\vec{\omega}$ перпендикулярна к $\vec{r}$ (как на рис.3), то $(\vec{\omega}, \vec{r}) = 0$ и мы получаем:

$$\vec{a}_n = -\vec{r}\omega^2,$$

где знак «–» показывает, что нормальное ускорение и вектор $\vec{r}$ направлены в противоположные стороны.