Лекция №3
ДИНАМИКА

Динамика – раздел механики, изучающий движение тел под действием приложенных сил. Законы механики, позволяющие решить ее основную задачу – нахождение траектории точки, сформулированы в XVII веке Исааком Ньютоном. Эти законы составляют основу механики как науки. Для их формулировки наряду со скоростью и ускорением вводятся еще понятия *массы*, *импульса* и *силы*.

Определение массы, импульса и силы

Масса является мерой инертности тела. Она определяется сравнением с эталонной массой. Эта масса называется *инертной массой* тела. Сила, с которой тело притягивается к Земле, пропорциональна его *гравитационной массе* m_g. Инертную и гравитационную массы принято считать равными, поскольку опытным путем установлено, что их отличие, даже если оно и существует, не превышает 10^{-8} относительных единиц. Поэтому на практике массу тела определяют взвешиванием на рычажных весах, на одной из чашек которых находится тело эталонной массы.

Импульсом тела (материальной точки) $\vec{p}$ *называется произведение его массы* m *на скорость* $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p} = m\,\vec{\upsilon}\,. \qquad (1)$$

Единица измерения импульса:

$$[\,p\,] = \text{кг} \cdot \text{м / с}.$$

Сила является мерой воздействия одного тела на другое.

В СИ единица силы – *Ньютон*:

$$[\,F\,] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м / с}^2.$$

Законы Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Приведем формулировку законов Ньютона, лежащих в основе классической механики.

<u>*Первый закон*</u>. *Если на тело не действуют силы или сумма этих сил равна нулю, то тело пребывает в состоянии покоя или движется с постоянной скоростью:*

$$\vec{a} = 0\,, \text{ если } \vec{F}_{рез} = 0\,. \qquad (2)$$

<u>*Второй закон*</u>. *Скорость изменения импульса тела во времени равна результирующей приложенных к телу сил:*

$$\frac{d\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}_{рез}\,. \qquad (3)$$

Для тела постоянной массы скорость изменения импульса совпадает с произведением массы на ускорение:

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{рез}\,. \qquad (4)$$

<u>*Третий закон*</u>. *Если два тела взаимодействуют друг с другом, то сила, действующая на первое тело со стороны второго, равна по модулю и противоположна по направлению силе, действующей на второе тело со стороны первого (рис.1):*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{5}$$

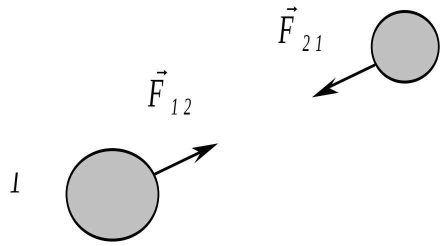

Рис.1

Законы Ньютона выполняются в инерциальных *системах отсчета.*

Системой отсчета называется совокупность системы координат, связанной с телом отсчета, и покоящихся относительно него часов.

Инерциальной называется система отсчета, в которой тело, на которое не действуют никакие силы или сумма их равна нулю, покоится или движется с постоянной скоростью. Такая система отсчета не имеет ускорения. Первый закон, называемый также законом инерции, был сформулирован Галилео Галилеем.

Система отсчета, движущаяся с ускорением, называется неинерциальной. В частности, неинерциальной является любая вращающаяся система отсчета. В неинерциальных системах на тело действуют дополнительные силы, называемые *силами инерции*, не связанные с взаимодействием тел.

Законы Ньютона предполагают *аддитивность массы* и *векторный характер сложения сил.* Это значит, что масса тела, составленного из нескольких тел, равна сумме масс каждого из этих тел, а действующая на тело результирующая сила является векторной суммой приложенных к нему сил.

Законы Ньютона не выводятся из каких-либо общих принципов. Критерием их справедливости служит опыт. Расчеты, основанные на законах Ньютона, согласуются с экспериментом. Однако законы классической механики имеют пределы применимости. В области микромира действуют законы *квантовой механики*, созданной в начале XX века, согласно которым нельзя одновременно задать точные значения координат и импульсов микрочастиц, как это делается в классической механике. Поэтому нельзя говорить и о траектории движения микрочастицы.

Теория относительности, созданная в начале прошлого века Альбертом Эйнштейном, ограничивает применимость классической механики Ньютона случаем скоростей υ, много меньших скорости света c ($\upsilon \ll c$). Большинство других разделов физики использует уравнения классической механики, т.е. область ее применимости очень широка. Примерами могут служить небесная механика, изучающая движение планет солнечной системы, гидро- и аэродинамика, теория упругости, теория колебаний и другие.

Закон сохранения импульса

Из законов Ньютона следует закон сохранения импульса для замкнутой системы тел. *Замкнутой называют систему тел, на которые не действуют внешние силы.* Тела системы могут взаимодействовать только между собой.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух тел A и B

(рис.2). Согласно третьему закону Ньютона, силы их взаимодействия

$$\vec{F}_{AB} = -\,\vec{F}_{BA}. \qquad (6)$$

По второму закону Ньютона $\vec{F}_{AB} = \dfrac{d\,\vec{p}_A}{d\,t}$, $\vec{F}_{BA} = \dfrac{d\,\vec{p}_B}{d\,t}$, поэтому $\dfrac{d\,\vec{p}_A}{d\,t} = -\dfrac{d\,\vec{p}_B}{d\,t}$, т.е. $\dfrac{d(\,\vec{p}_A + \vec{p}_B\,)}{d\,t} = 0$, откуда следует, что $\vec{p}_A + \vec{p}_B = const$.

Для системы n тел:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const. \qquad (7)$$

Это уравнение выражает *закон сохранения импульса*: *суммарный импульс замкнутой системы тел не изменяется со временем.*

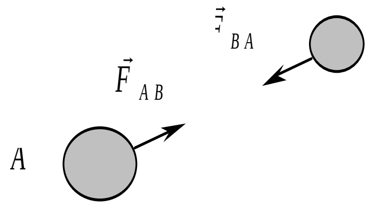

Рис.2

Векторное уравнение (7) распадается на три независимых уравнения для компонент импульса по осям координат:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{xi} = const, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{yi} = const, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{zi} = const.$$

Если вдоль какого-либо направления на систему тел не действуют внешние силы, то проекция ее суммарного импульса на это направление остается постоянной. Это позволяет использовать закон сохранения импульса при решении задач механики.

Как показывает опыт, закон сохранения импульса выполняется при *любых взаимодействиях* тел внутри замкнутой системы. Так, соударение тел может быть упругим или неупругим или может иметь место взаимодействие тел посредством полей, т.е. на расстоянии.

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов физики. То обстоятельство, что для произведения $m\vec{\upsilon}$ массы материальной точки на ее скорость имеет место "закон сохранения", делает целесообразным дать ему специальное название – импульса $\vec{p}$.

Центр масс системы материальных точек.
Теорема о движении центра масс

Совокупность материальных точек или тел, которые по условию задачи можно рассматривать как материальные точки, называется *механической системой* или *системой материальных точек*. Пусть все они движутся относительно некоторой системы отсчета K. Движение каждой отдельной точки может быть очень сложным, так как кроме внешних сил на нее действуют еще и силы со стороны остальных материальных точек. Можно, однако, простым способом описать движение всей системы в целом, если ввести понятие *центра масс*.

Обозначим $\vec{r}_i$ радиус-вектор точки массой m_i, а $\vec{r}_c$ – радиус-вектор центра масс системы. По определению

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (8)$$

Если начало системы отсчета K поместить в точку C, то $\vec{r}_c = 0$ и из (8) получим уравнение для нахождения координат центра масс:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0. \qquad (9)$$

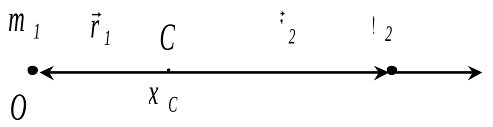

Рис.3

Найдем положение центра масс системы, состоящей из двух тел (материальных точек) массами m_1 и m_2, отстоящих друг от друга на расстоянии l (полагаем $m_1 > m_2$). Ось X направим вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис.3). Тогда уравнение (9) $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ в проекции на ось X приобретает вид

$$-m_1 x_c + m_2 (l - x_c) = 0,$$

откуда расстояние от тела большей массы m_1 до центра масс C:

$$x_c = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Расстояние от точки C до тела меньшей массы m_2:

$$l - x_c = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Отношение этих расстояний обратно пропорционально отношению масс: $\frac{x_c}{l - x_c} = \frac{m_2}{m_1}$. Таким образом, центр масс лежит между точками m_1 и m_2 на соединяющей их прямой ближе к телу большей массы m_1.

Из определения следует, что центр масс совокупности материальных точек не может оказаться вне сферы, заключающей в себя все эти точки.

Твердое тело можно представить в виде совокупности материальных точек, расстояния между которыми неизменны. В однородном поле тяжести к центру масс тела приложена равнодействующая параллельных сил, действующих на каждую из этих точек. Поэтому центр масс является в то же время *центром тяжести* тела. Если внешнее поле не однородно, то центр масс и центр тяжести не совпадают.

Центр масс тела называют еще *центром инерции*, поскольку приложенная к центру масс сила порождает движение тела в направлении ее действия с ускорением, определяемым вторым законом Ньютона $\vec{a} = \vec{F} / m$, т.е. масса тела выступает в роли инертной массы материальной точки, пространственно совпадающей с его центром масс.

Центр масс тела, имеющего какую-либо симметрию, расположен в центре симметрии или на оси симметрии. У тел неправильной формы положение центра масс можно найти экспериментально. Для этого тело нужно подвесить поочередно за три разные точки и мысленно провести через них вертикальные прямые. Эти линии пересекутся в центре масс тела.

Продифференцировав равенство (8) по времени, получим скорость движения центра масс:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{10}$$

Эта скорость равна сумме импульсов всех точек системы, деленной на полную ее массу. Суммарный импульс составляющих механическую систему тел, как следует из уравнения (10), равен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\vec{p}_{сум} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \vec{\upsilon}_c , \tag{11}$$

т.е. центр масс движется как материальная точка, масса которой равна всей массе системы.

Докажем, что центр масс является носителем всего импульса системы. Для простоты рассмотрим систему двух тел (точечных масс m_1 и m_2), изображенную на рис.4. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены к телам извне, а силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ – внутренние силы их взаимодействия.

Запишем уравнения движения каждого из тел:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}.$$

Сложим их и учтем, что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, так что сумма внутренних сил обращается в нуль. Тогда

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{12}$$

Используя определение центра масс (8), левую часть представим в виде

$$\frac{d^2(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{dt^2} = (m_1 + m_2)\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = (m_1 + m_2)\,\vec{a}_c ,$$

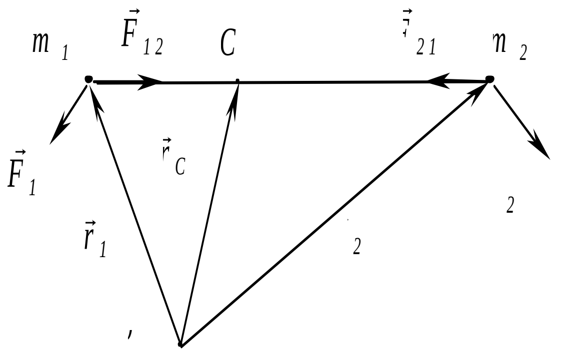

Рис.4

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс.

Обозначив сумму масс тел через m $(m = m_1 + m_2)$, а сумму внешних сил через $\vec{F}_{внеш}$, т.е. ($\vec{F}_{внеш} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$), из (12) получим

$$m\,\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}. \qquad (13)$$

Это уравнение движения материальной точки массой m под действием силы $\vec{F}_{внеш}$. Таким образом, *центр масс системы материальных точек движется как одна материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действует сила, равная сумме внешних сил, приложенных к каждой из материальных точек*.

Это утверждение составляет формулировку *теоремы о движении центра масс*.

При отсутствии внешних сил или равенстве нулю их геометрической суммы центр масс движется равномерно и прямолинейно, либо остается в покое. В этом случае говорят, что выполняется закон сохранения импульса.

Из принципа независимости действия сил следует, что теорему о движении центра масс можно применить к движению вдоль каждой из координатных осей. Математическим выражением этого служит эквивалентность векторного уравнения (13) трем скалярным уравнениям для проекций тех же векторов на координатные оси X, Y и Z:

$$m\,\frac{d^2 x_c}{d\,t^2} = F_x^{внеш}, \qquad m\,\frac{d^2 y_c}{d\,t^2} = F_y^{внеш}, \qquad m\,\frac{d^2 z_c}{d\,t^2} = F_z^{внеш}. \qquad (14)$$

Исследуя движение центра масс вдоль какого-нибудь направления, например, вдоль оси X, мы можем рассматривать это движение так, как если бы движения в направлении двух других осей не происходило.

Уравнения (14) выражают ту форму, в которой закон сохранения импульса применяется на практике при решении задач механики, поскольку в земных условиях мы нигде не встречаем замкнутой системы тел, отвечающей приведенному выше ее определению.