ЛЕКЦИЯ 4

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Представление о работе, как и о силах, заимствованное из нашего повседневного опыта, имеет в физике вполне определенный смысл. Работу измеряют произведением силы, действующей на тело в направлении его перемещения, на модуль этого перемещения. Энергию измеряют работой, которую может произвести тело.

В механике вводятся понятия *кинетической* и *потенциальной* энергии. Их сумма при определенных условиях является постоянной величиной, т.е. сохраняется в процессе движения тел. Принцип сохранения механической энергии часто дает возможность обойтись без применения законов Ньютона и провести простым и быстрым способом анализ движения механической системы. Изложению этих и связанных с ними вопросов посвящена настоящая глава.

Работа постоянной силы

Пусть тело, на которое действует постоянная сила $\vec{F}$, двигаясь по прямой, проходит путь s (рис.1). *Работой этой силы называется произведение модуля силы на перемещение s точки ее приложения и на косинус угла α между направлением силы и направлением перемещения:*

$$A = F\,s\,\cos\alpha \qquad (\vec{F} = const). \tag{1}$$

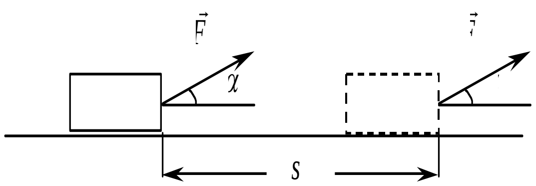

Рис.1

Единицей измерения работы в системе СИ служит *джоуль* (Дж). Это работа силы в *1 ньютон* (Н) на пути в *1 метр* (при α = 0):

1 Дж = *1* Н · *1* м.

Правую часть формулы (1) можно записать в виде *скалярного произведения* вектора силы $\vec{F}$ и вектора перемещения $\vec{s}$:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s}\,. \tag{2}$$

Скалярное произведение векторов

Наряду с операциями сложения, вычитания и умножения вектора на скаляр, рассмотренными ранее, можно ввести операцию умножения двух векторов. Можно определить два различных действия умножения векторов: умножение *скалярное* и умножение *векторное*.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение модулей обоих векторов, умноженное на косинус угла между ними.

Будем обозначать скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точкой между ними. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\,). \tag{3}$$

Употребляются и другие обозначения скалярного произведения:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv\vec{a}\,\vec{b}\equiv(\vec{a},\vec{b}).$$

В результате скалярного умножения векторов получается *скаляр*, т.е. число, что и объясняет название скалярного произведения.

В качестве примера рассмотрим камень массой m брошенный вертикально вниз из точки *1* на высоте *h*. В точке 2 он касается Земли. Какую работу совершает сила тяжести за время полета камня?

Решение. Так как сила тяжести постоянна и равна $\vec{F}=m\vec{g}$, то ее работу найдем, вычислив скалярное произведение $\left(\vec{F},\vec{s}\right)$. Учтем что движение вертикальное и $\alpha=0$, т.е. $\cos\alpha=1$ тогда получаем

$$A_{12}=\left(\vec{F},\vec{s}\right)=mg\cdot s\cdot\cos\alpha=mg\cdot h,$$

где перемещение *s* совпадает с высотой *h*. На самом деле из более сложных рассуждений следует, что работа силы тяжести всегда равна mgh и не зависит от траектории движения.

Работа переменной силы

Если траектория движущегося тела (материальной точки) не является прямой, а действующая на него сила не постоянна, то для вычисления работы разобьем весь путь на прямолинейные отрезки $\Delta\vec{s}_i$ достаточно малой длины, чтобы действующую на тело на каждом из этих отрезков силу можно было считать постоянной (рис. 3.2). Работу, совершаемую при перемещении тела из точки 1 в точку 2, представим в виде суммы работ на каждом из отрезков:

$$A_{12}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i,\Delta\vec{s}_i).$$

Производя все более мелкие разбиения, т.е. устремляя N к бесконечности, приходим к интегралу, вычисляемому вдоль траектории движения тела:

$$A_{12}=\int_{L_{12}}(\vec{F},d\vec{s}).\qquad(4)$$

Такой интеграл называется *криволинейным*, поскольку значения подынтегральной функции берутся в точках кривой (обозначенной через L_{12}), вдоль которой движется тело.

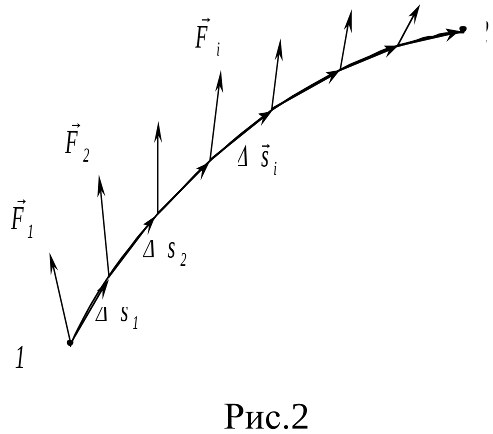

Рис.2

Кинетическая энергия. Теорема о связи работы и энергии

Кинетическая энергия тела измеряется работой, которую благодаря инерции может произвести движущееся тело при его торможении до полной остановки.

Кинетическая энергия равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости:

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{5}$$

Единица измерения кинетической энергии – *джоуль* (Дж) – совпадает с единицей измерения работы.

Покажем, как связаны эти величины между собой. Согласно соотношению (4), работа, совершаемая результирующей силой:

$$A_{12} = \int\limits_{L_{12}} (\vec{F}_{рез}, d\vec{s}\,) = \int\limits_{L_{12}} (m\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \vec{\upsilon}\,dt) = m\int\limits_{L_{12}} (\vec{\upsilon}, d\vec{\upsilon}\,), \tag{3.6}$$

поскольку, по второму закону Ньютона, $\vec{F}_{рез} = m\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, а $d\vec{s} = \vec{\upsilon}\,dt$.

Пусть υ – модуль вектора $\vec{\upsilon}$. Тогда $\vec{\upsilon}^2 = \upsilon^2$ и дифференциал от обеих частей этого равенства $\vec{\upsilon}\,d\vec{\upsilon} = \upsilon\,d\upsilon$. После подстановки в (6) получим

$$A_{12} = m\int\limits_{L_{12}} \upsilon\,d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \tag{7}$$

Мы доказали теорему о связи работы и энергии: *работа, совершаемая действующей на тело результирующей силой, равна приращению его кинетической энергии:*

$$A_{12} = \int\limits_{L_{12}} (\vec{F}_{рез}, d\vec{s}\,) = W_{к2} - W_{к1}, \tag{8}$$

где $W_{к1}$ и $W_{к2}$ – кинетическая энергия тела соответственно в начальной и конечной точках пути.

Консервативные и неконсервативные силы

В механике наряду с кинетической энергией вводится понятие *потенциальной энергии*. Тело может обладать потенциальной энергией, если на него действуют консервативные силы.

Выше было показано (см. пример), что при перемещении тела работа силы тяжести определяется только высотой над уровнем Земли начальной и конечной точек его пути и не зависит от формы его траектории. Кроме силы тяжести тем же свойством обладают и другие фундаментальные силы природы – *электромагнитные, ядерные и слабые*.

Дадим теперь следующее определение: *если работа силы, действующей на тело, не зависит от формы траектории его движения, а определяется только координатами начала и конца пути, то эта сила называется* *консервативной*.

В частности, если тело, пройдя в поле консервативной силы по замкнутой траектории, возвращается в исходную точку, то полная работа этой силы на всем пути равна нулю.

К *неконсервативным силам* относятся силы трения и так называемые *гироскопические силы* – сила Лоренца, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, и сила Кориолиса, возникающая во вращающихся системах отсчета. Обе эти силы направлены перпендикулярно вектору скорости тела и не совершают работы. Работа же сил трения всегда отрицательна.

Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике

Используя понятие консервативной силы, можно дать определение потенциальной энергии.

Какое-либо положение O тела в пространстве условно принимается за *нулевое*. *Тогда работа, которую совершают консервативные силы при перемещении тела из данного положения 1 в нулевое, называется* *потенциальной энергией* *тела в данном положении*:

$$W_p = A_{10}. \qquad (9)$$

Потенциальная энергия есть запасенная энергия, которая может быть преобразована в работу, кинетическую энергию или другие виды энергии, не рассматриваемые в механике, например во внутреннюю (тепловую) энергию.

Из определения следует:

1. Потенциальная энергия при неизменных внешних условиях зависит только от координат тела (материальной точки):

$$W_p = W_p(x,y,z).$$

2. Потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до постоянного слагаемого, поскольку зависит от выбора нулевого положения. Физический смысл имеет разность потенциальных энергий тела в каких-либо двух точках пространства.

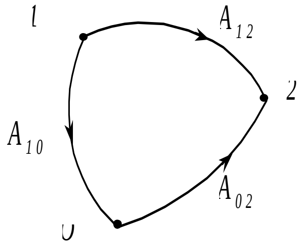

Рис.3

3. Работа консервативных сил при перемещении тела из одной точки пространства в другую равна убыли его потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \qquad (10)$$

Покажем это. Пусть потенциальная энергия определена относительно точки *O* (рис.3). В силу независимости работы от формы пути работа A_{12} при перемещении тела из точки *1* в точку

2 по короткому пути равна работе перемещения тела по пути, проходящему через точку *O*:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}.$$

Но $A_{10} = W_{p1}$, а $A_{02} = -A_{20} = -W_{p2}$, откуда и следует равенство (10).

Работу консервативных сил можно выразить и через изменение кинетической энергии тела. По теореме о связи работы и энергии (7) эта работа равна приращению кинетической энергии тела: $A_{12} = W_{к2} - W_{к1}$. Таким образом,

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1}, \tag{11}$$

откуда следует, что

$$W_{к1} + W_{p1} = W_{к2} + W_{p2}. \tag{12}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий тела называется его *полной механической энергией*:

$$W = W_к + W_p. \tag{13}$$

Уравнение (12) выражает закон сохранения энергии в механике:

$$W = W_к + W_p = const. \tag{14}$$

Если на тело действуют только консервативные силы, то его полная механическая энергия остается постоянной: могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии тела измениться не может.

Замкнутой системой называется совокупность тел, на которые не действуют внешние силы. Если между телами такой системы действуют только консервативные силы, то она называется консервативной. *Полная механическая энергия замкнутой консервативной системы тел сохраняется во времени.*

Если наряду с консервативными силами на тело действует и сила трения, то, как следует из уравнения (11), при переходе тела из положения *1* в положение *2* часть его потенциальной энергии пойдет на совершение работы по преодолению силы трения:

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1} + \left| A_{тр} \right|,$$

или

$$W_{к2} + W_{p2} = W_{к1} + W_{p1} - \left| A_{тр} \right|,$$

т.е. полная механическая энергия тела уменьшается на величину этой работы, которая превращается в тепло:

$$W_1 - W_2 = \left| A_{тр} \right|.$$