ЛЕКЦИЯ № 5

Удары.

Удар - это столкновение двух или более тел, когда взаимодействие продолжается очень короткое время.

При ударе в телах возникают такие значительные внутренние силы, внешними силами, которые действуют на них, можно пренебречь. Это позволяет рассматривать эти тела как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Любой другой удар – нецентральный.

Абсолю́тно неупру́гий удар

Абсолютно неупругим называют такой удар, после которого скорости обоих соударяющихся тел оказываются одинаковыми. Чтобы это стало возможным, соударяющиеся тела должны обладать такими свойствами, что силы, возникающие при их деформации, зависят не от величины деформации, а от скорости изменения деформации. Такие свойства присущи, например, мягкой глине, пластилину. При неупругом соударении происходит следующее. В начальный момент удара скорость деформации велика (шары сжимаются), поэтому возникают значительные силы, сообщающие обоим шарам ускорения, направленные в противоположные стороны. По мере развития удара скорости деформации шаров уменьшаются, а сами деформации увеличиваются до тех пор, пока скорости шаров не окажутся равными. В этот момент деформации шаров перестанут изменяться, исчезнут силы, и оба шара будут двигаться с одинаковой скоростью. При абсолютно неупругом ударе выполняются законы сохранения импульса и полной энергии. Механическая же энергия тел до удара больше механической энергии после удара, так как она частично (или полностью) переходит во внутреннюю энергию тел и расходуется на работу по деформации тел. Для определения скорости тел после взаимодействия рассмотрим удар двух шаров (материальных точек), образующих замкнутую систему. Массы шаров m_1 и m_2, скорости до удара $\vec{\upsilon_1}$ и $\vec{\upsilon_2}$. Согласно закону сохранения суммарный импульс шаров до удара должен быть таким же, как после удара:

$$m_1\vec{\upsilon_1}+m_2\vec{\upsilon_2}=\left(m_1+m_2\right)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ - скорость после удара, одинаковая для обоих шаров. Из уравнения следует, что:

$$\vec{u}=\frac{m_1\vec{\upsilon_1}+m_2\vec{\upsilon_2}}{m_1+m_2}$$

Закон сохранения механической энергии для неупругого удара не выполняется, однако мы можем написать:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1+m_2}{2}u^2+W_{потерь}$$

где $W_{потерь}$ - потери механической энергии в системе.

Для конкретных расчетов скорости нужно спроектировать соотношение импульсов на выбранные направления. Если до удара скорости шаров направлены вдоль прямой, проходящей через их центры, удар называют **центральным**. Скорость шаров после такого удара будет направлена по той же прямой. Поэтому уравнение сохранения импульсов можно рассматривать как скалярное. Но скорости при этом надо считать совпадающими по знаку, когда они направлены в одну сторону и противоположными по знаку, когда они направлены в противоположные стороны. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Шары движутся в одном направлении. Удар возможен, если скорости $\vec{\upsilon_1}$ и $\vec{\upsilon_2}$ различны. Например, $\vec{\upsilon_2} > \vec{\upsilon_1}$, т.е. второй шар догоняет первый. После удара шары будут двигаться в ту же сторону со скоростью большей, чем скорость первого шара и меньшей, чем скорость второго

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

2. Шары движутся навстречу друг другу. После удара шары будут двигаться вместе в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом, т.е.

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} .$$

Если импульсы обоих шаров равны по величине, то после удара оба шара остановятся.

Упругие столкновения

При ударе тела деформируются. Суть упругого удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения контактирующих тел на короткое время превращается в энергию упругой деформации, которая в свою очередь переходит снова в кинетическую энергию движения. За счет чего имеет место перераспределение энергии между контактирующими телами.

Абсолютно упругий удар - столкновение двух тел во время которого хранится не только геометрическая сумма импульсов, но и сумма кинетических энергий взаимодействующих тел, то есть выполняются законы сохранения импульса и механической энергии.

Обозначим скорости шаров массами m_1, m_2 до удара через $\vec{\upsilon_1}$, $\vec{\upsilon_2}$, после удара - через $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$. Законы сохранения импульса и энергии имеют вид:

$$m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} .$$

Рассмотрим центральный удар в котором одно тело настигает друге, тогда проекции векторов будут положительные и можно записать

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases} .$$

Сократим на двойку и перегруппируем слагаемые

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 - m_1u_1 = m_2u_2 - m_2\upsilon_2 \\ m_1\upsilon_1^2 - m_1u_1^2 = m_2u_2^2 - m_2\upsilon_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) \end{cases} .$$

Воспользовавшись первым уравнением перепишем второе

$$m_2(u_2 - \upsilon_2)(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) .$$

После сокращения имеем

$$u_1 = u_2 + \upsilon_2 - \upsilon_1 .$$

Используя эту связь между скоростями получаем из первого уравнения

$$m_1(\upsilon_1 - u_2 - \upsilon_2 + \upsilon_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \text{ или } 2m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2 = u_2(m_2 + m_1) .$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Тогда для u_1 получим

$$u_1 = u_2 + \upsilon_2 - \upsilon_1 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} + \upsilon_2 - \upsilon_1 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1) + \upsilon_2(m_2 + m_1) - \upsilon_1(m_2 + m_1)}{m_2 + m_1}$$

$$u_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + \upsilon_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}.$$

Надо отметить, что когда шары движутся навстречу, то закон сохранения импульса и энергии имеет вид

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}.$$

Решение этой системы уравнений есть

$$u_1 = \frac{-2m_2\upsilon_2 + \upsilon_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 - \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи столкновений:

1. Равные массы $m_1 = m_2 = m$.

1.а. Первая частица догоняет вторую $\upsilon_1 > \upsilon_2$

$$u_1 = \frac{2m \cdot \upsilon_2}{m + m} = \upsilon_2,$$

$$u_2 = \frac{2m \cdot \upsilon_1}{m + m} = \upsilon_1.$$

Т.е. частицы обмениваются скоростями, и после удара вторая частица удаляется от первой.

1.б. Частицы движутся на встречу друг другу.

$$u_1 = \frac{-2m\upsilon_2}{m + m} = -\upsilon_2$$

$$u_2 = \frac{2m\upsilon_1}{m + m} = \upsilon_1.$$

После удара частицы движутся в противоположные стороны, первая частица со скоростью второй до удара, а вторая со скоростью первой.

1.в. Вторая частица до удара неподвижна, тогда $\upsilon_2 = 0$ и мы находим

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \upsilon_1.$$

Т.е. после столкновения первая частица останавливается, а вторая начинает двигаться со скоростью первой.

2. Равные скорости. Частицы движутся навстречу друг другу.

$$u_1 = \frac{-2m_2\upsilon + \upsilon(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \frac{-2m_2\upsilon + \upsilon m_1 - \upsilon m_2}{m_2 + m_1} = \frac{-3m_2\upsilon + \upsilon m_1}{m_2 + m_1} = \upsilon\frac{m_1 - 3m_2}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon - \upsilon(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1\upsilon - \upsilon m_2 + \upsilon m_1}{m_2 + m_1} = \upsilon\frac{3m_1 - m_2}{m_2 + m_1}.$$

3. Неподвижный второй шар до столкновения.

$$u_1 = \upsilon_1 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1},$$

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1}{m_2 + m_1}.$$

Если масса первого шара больше второго, то он продолжит движение в том же направлении, если меньше, то покатится обратно. Второй шар после столкновения начнет двигаться.

4. Первый шар сталкивается с покоящимся вторым шаром бесконечной массы, т.е. $\upsilon_2 = 0$ и $m_2 \to \infty$. Тогда

$$u_1 = \frac{\upsilon_1 (m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \upsilon_1 \frac{m_1 / m_2 - m_2 / m_2}{m_2 / m_2 + m_1 / m_2} \to \upsilon_1 \frac{0 - 1}{1 + 0} = -\upsilon_1,$$

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1 / m_2}{m_2 / m_2 + m_1 / m_2} \to \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Т.е. первый шар отскакивает обратно с той же самой скоростью.

Нецентральный упругий удар

Частным случаем нецентрального упругого удара может служить соударение двух бильярдных шаров одинаковой массы, один из которых до соударения был неподвижен, а скорость второго была направлена не по линии центров шаров (рис. 1).

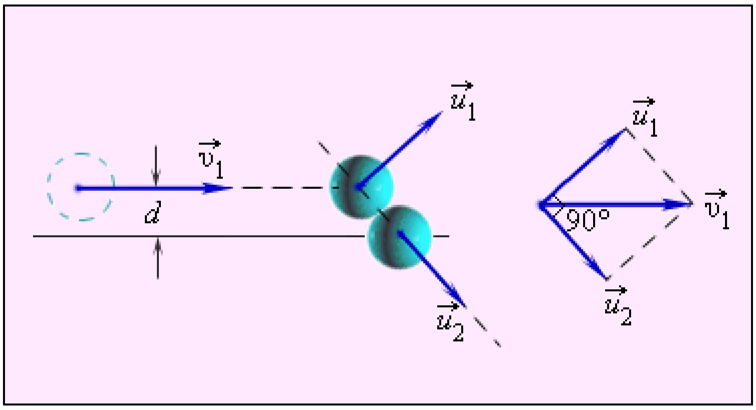

Рис. 1. Нецентральное упругое соударение шаров одинаковой массы, d – прицельное расстояние

После нецентрального соударения шары разлетаются под некоторым углом друг к другу. Для определения скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. после удара нужно знать положение линии центров в момент удара или прицельное расстояние d (рис. 1), т. е. расстояние между двумя линиями, проведенными через центры шаров параллельно вектору скорости υ_1 налетающего шара. Если массы шаров одинаковы, то векторы скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ шаров после упругого соударения всегда направлены перпендикулярно друг к другу. Это легко показать, применяя законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}$$

При $m_1 = m_2 = m$ и $\vec{\upsilon}_2 = 0$ эти законы принимают вид:

$$\begin{cases} m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 \\ \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{mu_1^2}{2} + \dfrac{mu_2^2}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \vec{\upsilon}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \upsilon_1^2 = u_1^2 + u_2^2 \end{cases}$$

Первое из этих равенств означает, что векторы скоростей $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ образуют треугольник (диаграмма импульсов), а второе – что для этого треугольника справедлива теорема Пифагора, т. е. он прямоугольный. Угол между катетами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равен 90°.