Лекция №6.

Динамика вращательного движения

Рассмотрим движение материальной точки по окружности и на этом примере введем новые величины, которые необходимы при описании вращательного движения твердого тела.

Пусть материальная точка массой m начинает движение по окружности радиусом R под действием силы F, которая всегда направлена по касательной к этой окружности. Тогда, по теореме о кинетической энергии, работа этой силы равняется кинетической энергии, которую приобретает материальная точка из состояния покоя:

$$A = F \cdot s = W_{кин} = \frac{m\text{v}^2}{2},$$

где s - путь, который проходит материальная точка по окружности при повороте на угол φ. Перейдем от линейных величин к угловым $s = R\varphi$, $\text{v} = \omega R$.

Получаем

$$F \cdot s = FR \cdot \varphi = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Напомним, что произведение силы на плечо называется **моментом силы**

$$M = FR,$$

где плечом является длина перпендикуляра проведенного из точки, относительно которой осуществляется вращение до линии действия силы.

Произведение массы материальной точки на квадрат радиуса окружности, по которой осуществляется вращение, называется **моментом инерции** материальной точки:

$$I = mR^2.$$

Обобщая введенные понятия скажем следующее:

1) работа при вращательном движении определяется выражением:

$$A = M \cdot \varphi$$

2) кинетическая энергия при вращательном движении определяется выражением:

$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Если вращается система из N материальных точек жестко связанных между собой, то кинетическая энергия определяется точно таким же выражением, в котором под моментом инерции понимается следующее

$$I = m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + \ldots + m_N r_N^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2},$$

где m_i - масса i-ой материальной точки,

r_i - радиус вращения i-ой материальной точки.

Свободные оси и главные моменты инерции твердых тел. Теорема Штейнера

Моменты инерции тел правильной формы могут быть найдены аналитически. Для этого в формуле для момента инерции следует перейти от суммирования к интегрированию по объему тела V:

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm.$$

Для однородного тела $dm = \rho dV$, где $\rho = m/V$ – его плотность. Тогда

$$I = \rho \int_V r^2 dV.$$

В качестве примера найдем момент инерции однородного тонкого стержня длиной l относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через один из его концов (ось AA' на рис.). Разобьем стержень на малые участки длиной dr. Объем каждого такого участка $dV = S\,dr$, где S – площадь поперечного сечения стержня.

Подставляя элемент объема $dV = S\,dr$ в интеграл получим

$$I = \rho \int_0^l S r^2 dr = \frac{1}{3}\rho S l^3 = \frac{1}{3} m l^2,$$

поскольку $\rho S l = \rho V = m$ – масса стержня.

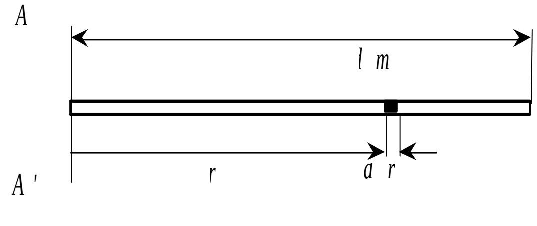


Рис.

Любое тело имеет **т р и** взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр его масс, вращение вокруг которых не сопровождается давлением на подшипники, крепящие ось. Они называются *свободными осями*. У тела правильной формы эти оси совпадают с осями его симметрии.

Моменты инерции тела относительно свободных осей I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются *главными моментами инерции,* а сами эти оси – *главными осями инерции*.

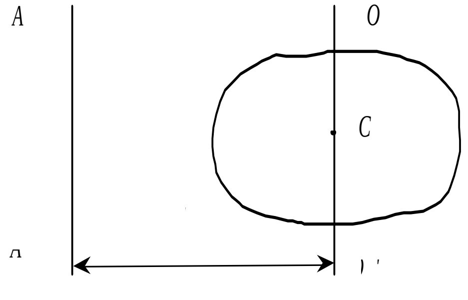


Рис.

При вычислении моментов инерции тел используют *теорему Штейнера: момент инерции I_A тела относительно некоторой оси AA' равен сумме момента инерции* *тела* I_C *относительно оси* OO', *проходящей через центр его масс С параллельно оси* AA', *и произведения массы тела на квадрат расстояния* d *между этими осями*:

$$I_A = I_C + md^2.$$

С помощью теоремы Штейнера найдем момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину (центр масс). Поскольку в этом случае $d = l/2$, из теоремы Штейнера следует:

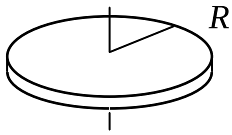
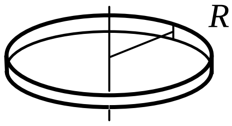
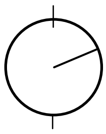
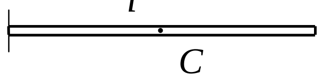
$$I_C = I_A - md^2.$$

Тогда

$$I_C = \frac{1}{3}ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2.$$

В табл. приведены моменты инерции однородных тел простой формы, вычисленные с помощью интегрирования.

Таблица *Моменты инерции некоторых тел*

Тело	*Рисунок*	*Момент инерции*
Цилиндр или диск		$I_{цил} = \frac{1}{2}mR^2$
Обруч		$I_{обр} = mR^2$
Шар		$I_ш = \frac{2}{5}mR^2$
Стержень		$I_C = \frac{1}{12}ml^2$
		$I_A = \frac{1}{3}ml^2$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижного центра

Законы механики вращательного движения связаны с понятиями *момента силы и момента импульса*. Следует различать моменты этих векторов относительно точки и относительно оси.

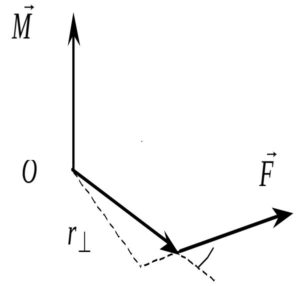


Рис.1

Пусть O – какая-либо точка, которую назовем *центром* или *полюсом вращения*. Обозначим $\vec{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы $\vec{F}$ (рис.1).

Моментом силы $\vec{F}$ относительно полюса O называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} .$$

Модуль момента силы

$$M = r F \sin \alpha = r_\perp F ,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а $r_\perp = r \sin \alpha$ – *плечо силы* – длина перпендикуляра, опущенного из полюса O на линию действия силы $\vec{F}$.

Моментом импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно полюса O называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$, соединяющего полюс с материальной точкой, на вектор ее импульса $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} .$$

Если траекторией частицы является окружность, то момент ее импульса относительно центра окружности:

$$L = m\upsilon r .$$

Момент импульса частицы, движущейся вдоль прямой линии (рис.2):

$$L = r\, p \sin\alpha = r_\perp m\upsilon .$$

Если на частицу не действуют силы, ее скорость не изменяется и момент импульса остается постоянным.

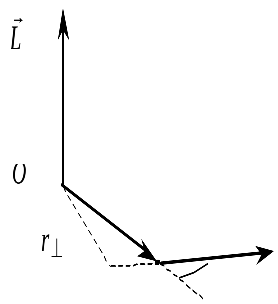


Рис. 2

Уравнение моментов

Рассмотрим вывод формулы уравнения моментов в самом простом случае. Пусть материальная точка движется по окружности радиусом r, тогда ее импульс (также как и скорость) направлен под углом 90° к радиус-вектору $\vec{r}$ и выражение для момента импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ можно написать в скалярном виде

$$L = r\ p\,.$$

Вычислим производную по времени от этого выражения

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = r\frac{dp}{dt}\,,$$

где мы учли, что при движении по окружности модуль радиус-вектора $\vec{r}$ не изменяется.

Из второго закона Ньютона следует, что

$$F = \frac{dp}{dt}\,,$$

тогда

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot F\,.$$

В данном случае произведение $r \cdot F$ определяет момент силы, действующий на материальную точку, т.е.

$$M = r \cdot F\,.$$

Окончательно получаем уравнение моментов в скалярном виде

$$\frac{dL}{dt} = M\,.$$

Проведем данную выкладку в векторном виде.

Продифференцируем выражение $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ по времени:

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}\,.$$

Производная радиуса-вектора $\vec{r}$ равна скорости материальной точки $d\,\vec{r}\,/\,d\,t = \vec{\upsilon}$, а поскольку векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{p}$ параллельны друг другу, их векторное произведение обращается в нуль. Во втором слагаемом $d\,\vec{p}\,/\,d\,t = \vec{F}$, а векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ образует момент силы $\vec{M}$. Поэтому

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \vec{M}\,.$$

Это соотношение называется *у р а в н е н и е м   м о м е н т о в*: *производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного центра равна моменту действующей на нее силы относительно того же центра.*