Лекция №7.

Закон сохранения момента импульса

По аналогии с динамикой поступательного движения можно показать, что уравнение моментов, выведенное в прошлой лекции, можно обобщить на случай системы N частиц (материальных точек). На каждую из материальных точек системы действуют *внешние* и *внутренние* силы. Под внешними следует понимать силы, действующие на материальные точки системы извне, а под внутренними – силы, с которыми каждая материальная точка системы действует на все остальные ее точки. В этом случае имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внешн},$$

где векторная сумма моментов внешних сил, приложенных к каждой из материальных точек системы $\vec{M}_{внешн} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{внешн}$, называется *результирующим или главным моментом внешних сил*.

Данное уравнение называется *основным уравнением динамики вращательного движения*. Из него следует *закон сохранения момента импульса: если результирующий момент внешних сил, действующих на систему материальных точек, равен нулю, то момент импульса системы остается постоянным во времени.*

Закон сохранения момента импульса является одним из фундаментальных законов физики наряду с законами сохранения импульса и энергии.

Основное уравнение динамики вращательного движения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим твердое тело, закрепленное на оси. Изменение скорости его вращения вызывается внешними силами. Действие силы зависит от ее направления и от точки приложения. Составляющая внешней силы вдоль оси не может изменить угловую скорость вращения тела. Это происходит под действием составляющей $F_\perp$ – проекции внешней силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения (рис.). Момент ее относительно оси Z:

$$M_z = F_\perp\, r \cdot sin\alpha = F_\perp \cdot r_\perp,$$

где $r_\perp$ – плечо силы $F_\perp$.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно оси* Z *называется произведение составляющей этой силы* $F_\perp$*, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой оси, на ее плечо.*

Чтобы найти момент импульса тела, вращающегося вокруг оси Z с угловой скоростью ω, разобьем его мысленно на N материальных точек массами m_i. Момент импульса каждой точки $L_{zi} = m_i \upsilon_i r_i = m_i r_i^2 \omega$, поскольку ее скорость $\upsilon_i = \omega r_i$, где r_i – расстояние точки от оси вращения. Суммируя по всем точкам и вынося за знак суммы общий множитель ω, получим момент импульса тела относительно оси Z:

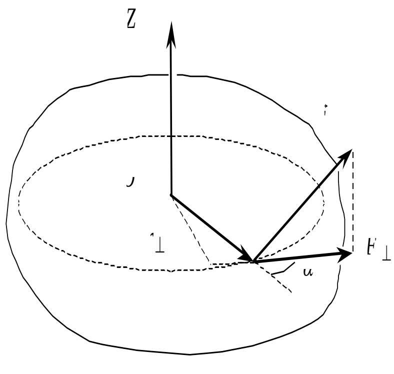

Рис.

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega .$$

Выражение в скобках называется *моментом инерции* тела (мы вводили его в предыдущей лекции) относительно оси Z:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

Отсюда получаем, что момент импульса тела, закрепленного на оси, равен произведению его момента инерции на угловую скорость:

$$L_z = I_z \omega .$$

Подставим это выражение в $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внешн}$, получим

$$I_z\varepsilon = M_z\,,$$

где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение тела, а M_z – проекция на ось Z вектора момента внешних сил.

Полученное уравнение называется *основным уравнением динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.* По форме записи оно совпадает с уравнением динамики поступательного движения и является аналогом второго закона Ньютона.

Момент инерции характеризует инертность тела при его вращении. Угловое ускорение тела $\varepsilon = M_z / J_z$ при заданном значении M_z тем меньше, чем больше его момент инерции J_z. Момент инерции выступает здесь в роли массы при движении поступательном. Однако в отличие от массы (см. ниже табл.) момент инерции зависит от конфигурации тела, т.е. от распределения его массы вокруг оси вращения.

Кинетическая энергия твердого тела при одновременном вращательном и поступательном движениях.

Как было показано в предыдущей лекции кинетическую энергию вращения тела можно представить в виде

$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Умножив числитель и знаменатель на I и воспользовавшись соотношением $L = I\omega$, эту формулу можно представить в виде

$$W_{вр} = \frac{L^2}{2I}.$$

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Кинетическая энергия движущегося тела равна сумме кинетической энергии его поступательного движения и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно направлению его движения (теорема Кёнига):*

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{вр}.$$

Пример.

Вычислим кинетическую энергию катящегося со скоростью v по горизонтальной поверхности цилиндра массой m.
Будем считать, что движение происходит без проскальзывания, тогда угловая скорость вращения цилиндра ω связана с поступательной скоростью центра масс v следующим (см. лекцию 2) образом

$$\mathrm{v} = \omega R,$$

где R - радиус цилиндра.
Согласно теореме Кёнига

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{вр}$$

где

$W_{пост} = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$ - поступательная кинетическая энергия,

$W_{вр} = \dfrac{I\omega^2}{2}$ - вращательная кинетическая энергия.

Момент инерции диска (цилиндра) относительно оси проходящей через его центр масс и перпендикулярной к плоскости диска находим из таблицы лекции № 6

$$I = \frac{1}{2} mR^2,$$

а угловую скорость ω найдем из выражения

$$\omega = \mathrm{v} / R.$$

Тогда, получаем

$$W_{кин} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} mR^2 (\mathrm{v}/R)^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{mR^2\mathrm{v}^2}{4R^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}^2}{4}$$

Окончательно

$$W_{кин} = \frac{2m\mathrm{v}^2}{4} + \frac{m\mathrm{v}^2}{4} = \frac{3m\mathrm{v}^2}{4}.$$

Для большей наглядной ясности представим аналогию между поступательными и вращательными величинами в виде таблицы.

Таблица

Поступательное движение (прямолинейное)	***Вращательное движение (вокруг неподвижной оси)***
Координата x	φ угловая координата
Скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ угловая скорость
Ускорение $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ угловое ускорение
Масса m	I момент инерции
Импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$ момент импульса
Закон сохранения импульса (для двух тел) $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\prime} + \vec{p}_2^{\prime}$	Закон сохранения момента импульса (для двух тел) $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1^{\prime} + \vec{L}_2^{\prime}$
Сила $\vec{F}$	$\vec{M}$ момент силы
Уравнение движения $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ уравнение движения
Работа $dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$	$dA = \vec{M}\cdot\overrightarrow{d\varphi}$ работа
Кинетическая энергия $W_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	$W_{вр} = \dfrac{J\omega^2}{2}$ кинетическая энергия
Равноускоренное движение	
Прямолинейное	Круговое
$s = \upsilon_0 t + \dfrac{a t^2}{2}$, $\upsilon = \upsilon_0 + a t$, $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2a s$	$\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$