

Лекція №3 ДИНАМІКА

Динаміка - розділ механіки, який вивчає рух тіл під дією прикладених сил. Закони, що дозволяють розв'язати цю проблему основне завдання - знаходження траєкторії точки, сформульовані в XVII столітті Ісааком Ньютоном. Ці закони становлять основу механіки як науки. Для їх формулювання поряд зі швидкістю і прискоренням вводяться ще поняття маси, імпульсу і сили.

Визначення маси, імпульсу і сили

Маса є мірою інертності тіла. Вона визначається порівнянням з еталонною масою. Ця маса називається *інертною масою* тіла. Сила, з якою тіло притягається до Землі, пропорційна його *гравітаційній масі* m_g . Інертну і гравітаційну маси прийнято вважати рівними, оскільки досвідченим шляхом встановлено, що їх відмінність, навіть якщо вона й існує, не перевищує 10^{-8} відносних одиниць. Тому на практиці масу тіла визначають зважуванням на важільних вагах, на одній з чашок яких знаходиться тіло встановленої маси.

Імпульсом тіла (матеріальної точки) \vec{p} називається добутком його маси m на швидкість \vec{v} :

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (1)$$

Одиниця виміру імпульсу:

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Сила є заходом впливу одного тіла на інше.

В СІ одиниця сили - Ньютон:

$$[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2.$$

Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку

Наведемо формулювання законів Ньютона, що лежать в основі класичної механіки.

Перший закон. Якщо на тіло не діють сили або сума цих сил дорівнює нулю, то тіло перебуває в стані спокою або рухається з постійною швидкістю:

$$\vec{a} = 0, \text{ якщо } \vec{F}_{\text{рез}} = 0. \quad (2)$$

Другий закон. Швидкість зміни імпульсу тіла в часі дорівнює результуючій прикладених до тіла сил:

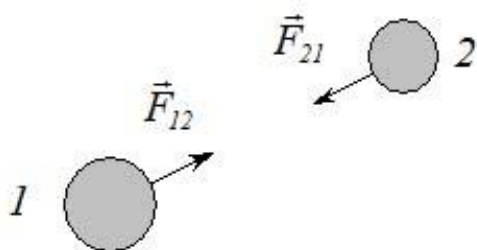
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}}. \quad (3)$$

Для тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу збігається з добутком маси на прискорення:

$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{рез}}. \quad (4)$$

Третій закон. Якщо два тіла взаємодіють один з одним, то сила, що діє на перше тіло з боку другого, рівна по модулю і протилежна у напрямку сили, що діє на друге тіло з боку першого (мал.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$



Мал.1

Закони Ньютона виконуються в інерційних системах відліку.

Системою відліку називається сукупність системи координат, пов'язаної з тілом відліку, і спочиваючих щодо нього годин.

Інерційною називається система відліку, в якій тіло, на яке не діють ніякі сили або сума їх дорівнює нулю, спочиває чи рухається з постійною швидкістю. Така

система відліку не має прискорення. Перший закон, званий також законом інерції, був сформульований Галілео Галілеєм.

Система відліку, що рухається з прискоренням, називається неінерціальною. Зокрема, неінерціальною є будь-яка обертається система відліку. В неінерційних системах на тіло діють додаткові сили, так звані сили інерції, не пов'язані з взаємодією тіл.

Закони Ньютона припускають адитивність маси і векторний характер складання сил. Це означає, що маса тіла, складеного з декількох тіл, дорівнює сумі мас кожного з цих тіл, а діюча на тіло результуюча сила є векторною сумою доданих до неї сил.

Закони Ньютона не виводяться з будь-яких загальних принципів. Критерієм їх справедливості служить досвід. Розрахунки, засновані на законах Ньютона, узгоджуються з експериментом. Однак закони класичної механіки мають межі застосування. В області мікросвіту діють закони квантової механіки, створеної в на чалі ХХ століття, згідно з якими не можна одночасно задати точні значення координат і імпульсів мікрочастинок, як це робиться в класичній механіці. Тому не можна говорити і про траєкторії руху мікрочастинок.

Теорія відносності, створена на початку минулого століття Альбертом Ейнштейн, обмежує застосовність класичної механіки Ньютона випадком швидкостей v , набагато менших швидкості світла c ($v \ll c$). Більшість інших розділів фізики використовує рівняння класичної механіки, тобто область її застосування дуже широка. Прикладами можуть служити небесна механіка, що вивчає рух планет сонячної системи, гідро- і аеродинаміка, теорія пружності, теорія коливань та інші.

Закон збереження імпульсу

Із законів Ньютона витікає закон збереження імпульсу для замкнутої системи тіл. Замкнутою називають систему тіл, на які не діють зовнішні сили. Тіла системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

Розглянемо замкнуту систему, що складається з двох тіл A і B (Мал. 2). Згідно з третім законом Ньютона, сили їх взаємодії

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (6)$$

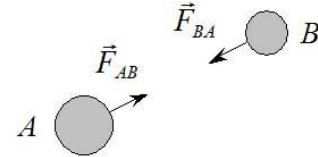
За другим законом Ньютона $\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$, $\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$, тому $\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$,

тобто $\frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0$, звідки слідує, що

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = const.$$

Для системи n тіл:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = const. \quad (7)$$



Мал.2

Це рівняння виражає закон збереження імпульсу: сумарний імпульс замкнутої системи тіл не змінюється з часом.

Векторне рівняння (7) розпадається на три незалежних рівняння для компонент імпульсу по осях координат:

$$\sum_{i=1}^n p_{xi} = const, \quad \sum_{i=1}^n p_{yi} = const, \quad \sum_{i=1}^n p_{zi} = const$$

Якщо уздовж будь-якого напрямку на систему тіл не діють зовнішні сили, то проекція її сумарного імпульсу на цей напрямок залишається постійною. Це дозволяє використовувати закон збереження імпульсу при вирішенні задач механіки.

Як показує досвід, закон збереження імпульсу виконується при будь-яких взаємодіях тіл всередині замкнутої системи. Так, зіткнення тіл може бути пружним або непружним або може мати місце взаємодія тіл за допомогою полів, тобто на відстані.

Закон збереження імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики. Та обставина, що для добутку $m\vec{v}$ маси матеріальної точки на її швидкість має місце "закон збереження", робить доцільним дати йому спеціальну назву – імпульсу \vec{p} .

Центр мас системи матеріальних точок.

Теорема про рух центру мас

Сукупність матеріальних точок або тіл, які за умовою задачі можна розглядати як матеріальні точки, називається *механічною системою* або *системою матеріальних точок*. Нехай всі вони рухаються щодо деякої системи відліку K . Рух кожної окремої точки може бути дуже складним, так як крім зовнішніх сил на неї діють ще й сили з боку інших матеріальних точок. Можна, однак, простим способом описати рух всієї системи в цілому, якщо ввести поняття *центру мас*.

Позначим \vec{r}_i радіус-вектор точки масою m_i , а \vec{r}_c – радіус-вектор центра мас системи.

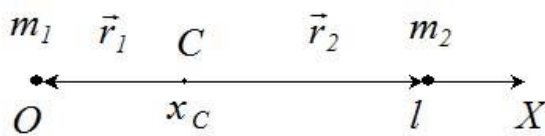
По визначенню

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (8)$$

Якщо початок системи відліку K помістити в точку C , то $\vec{r}_c = 0$ і із (8) отримаємо рівняння для знаходження координат центра мас:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0. \quad (9)$$

Знайдіть положення центра мас системи, що складається з двох тіл (матеріальних



Мал.3

точок) масами m_1 і m_2 , віддалених один від одного на відстані l (нехай $m_1 > m_2$). Ось X направимо вздовж прямої, що з'єднує ці точки (мал.3). Тоді рівняння (9) $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ в проекції на вісь X набуває вигляду

$$-m_1 x_c + m_2 (l - x_c) = 0,$$

звідки відстань від тіла великої маси m_1 до центру мас C :

$$x_c = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Відсталъ від точки C до тіла меншої маси m_2 :

$$l - x_c = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Співвідношення цих відстаней обернено пропорційно відношенню мас:

$$\frac{x_c}{l - x_c} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Таким чином, центр мас лежить між точками m_1 і m_2 і на з'єднуючій

їх прямій ближче до тіла більшої маси m_1 .

З визначення випливає, що центр мас сукупності матеріальних точок не може виявитися поза сферою, що вбирає в себе всі ці точки.

Тверде тіло можна представити у вигляді сукупності матеріальних точок, відстані між якими незмінні. В однорідному полі тяжіння до центру мас тіла прикладена рівнодіюча паралельних сил, що діють на кожну з цих точок. Тому центр мас є в той же час *центром ваги* тіла. Якщо зовнішнє поле не є однорідним, то центр мас і центр ваги не збігаються.

Центр мас тіла називають ще *центром інерції*, оскільки прикладена до центру мас сила породжує рух тіла в напрямку її дії з прискоренням, що визначаються другим законом Ньютона $\vec{a} = \vec{F} / m$, тобто маса тіла виступає в ролі інертної маси матеріальної точки, просторово збігається з його центром мас.

Центр мас тіла, що має будь-яку симетрію, розташований в центрі симетрії або на осі симетрії. У тіл неправильної форми положення центру мас можна знайти експериментально. Для цього тіло потрібно підвісити черзі за три різні точки і подумки провести через них вертикальні прямі. Ці лінії пересічуться в центрі мас тіла.

Проінтегрувавши рівність (8) за часом, отримаємо швидкість руху центру мас:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (10)$$

Ця швидкість дорівнює сумі імпульсів всіх точок системи, поділеній на повну її масу. Сумарний імпульс складових механічну систему тіл, як впливає з рівняння (10), дорівнює добутку маси системи на швидкість її центру мас:

$$\vec{p}_{\text{сум}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{v}_c, \quad (11)$$

тобто центр мас рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює всій масі системи.

Доведемо, що центр мас є носієм всього імпульсу системи. Для простоти розглянемо систему двох тіл (точкових мас m_1 і m_2), зображену на рис.4. Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 прикладені до тіл ззовні, а сили \vec{F}_{12} і \vec{F}_{21} - внутрішні сили їх взаємодії.

Запишемо рівняння руху кожного з тіл:

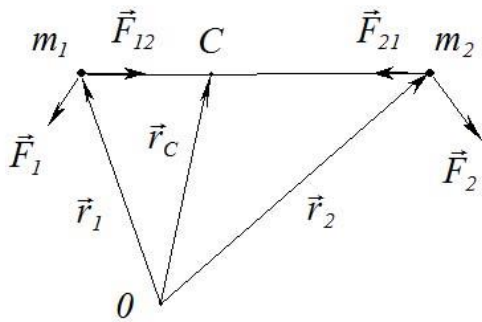
$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}.$$

Складемо їх і врахуємо, що за третім законом Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, так що сума внутрішніх сил звертається в нуль. Тоді

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (12)$$

Використовуючи визначення центру мас (8), ліву частину представимо у вигляді

$$\frac{d^2(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{dt^2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = (m_1 + m_2) \vec{a}_c,$$



Мал.4

де \vec{a}_c – прискорене центр мас.

Позначивши суму мас тіл через m ($m = m_1 + m_2$), а суму зовнішніх сил через $\vec{F}_{зовніш.}$, т.е. ($\vec{F}_{зовніш.} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$), из (12) получим

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{зовніш.} \quad (13)$$

Це рівняння руху матеріальної точки масою m під дією сили $\vec{F}_{внеш.}$. Таким чином, *центр мас системи*

матеріальних точок рухається як одна матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і на яку діє сила, яка дорівнює сумі зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок.

Це твердження становить формулювання *теорему про рух центру мас*.

При відсутності зовнішніх сил або рівність нулю їх геометричної суми центр мас рухається рівномірно і прямолінійно, або залишається в спокої. У цьому випадку кажуть, що виконується закон збереження імпульсу.

З принципу незалежності дії сил випливає, що теорему про рух центру мас можна застосувати до руху уздовж кожної з координатних осей. Математичним виразом цього служить еквівалентність векторного рівняння (13) трьом скалярним рівнянням для проєкцій тих же векторів на координатні осі X , Y і Z :

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = F_x^{зовніш.}, \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = F_y^{зовніш.}, \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = F_z^{зовніш.} \quad (14)$$

Досліджуючи рух центру мас уздовж якого-небудь напрямку, наприклад, уздовж осі, ми можемо розглядати цей рух так, як якщо б руху в напрямку двох інших осей не відбувалося.

Рівняння (14) висловлюють ту форму, в якій закон збереження імпульсу застосовується на практиці при вирішенні задач механіки, оскільки в земних умовах ми ніде не зустрічаємо замкнутої системи тіл, що відповідає наведеним вище її визначення.