Лекція №7.

Закон збереження моменту імпульсу

За аналогією з динамікою поступального руху можна показати, що рівняння моментів, виведене в минулій лекції, можна узагальнити на випадок системи N частинок (матеріальних точок). На кожну з матеріальних точок системи діють *зовнішні* і *внутрішні* сили. Під зовнішніми слід розуміти сили, що діють на матеріальні точки системи ззовні, а під внутрішніми – сили, з якими кожна матеріальна точка системи діє на всі інші її точки. У цьому випадку маємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовніш},$$

де векторна сума моментів зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок системи $\vec{M}_{зовніш} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,зовніш}$, називається *результуючим або головним моментом зовнішніх сил*

Дане рівняння називають *основним рівнянням динаміки обертального руху*. З нього *випливає закон збереження моменту імпульсу: якщо результуючий момент зовнішніх сил, діючих на систему матеріальних точок, дорівнює нулю, то момент імпульсу системи залишається постійним у часі.*

Закон збереження моменту імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики поряд із законами збереження імпульсу і енергії.

Основне рівняння динаміки обертального руху.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Розглянемо тверде тіло, закріплене на осі. Зміна швидкості його обертання викликається зовнішніми силами. Дія сили залежить від її направлення і від точки прикладання. Складова зовнішньої сили уздовж осі не може змінювати кутову швидкість обертання тіла. Це відбувається під дією складової $F_{\perp}$ - проекції зовнішньої сили на площину, перпендикулярну до осі обертання (рис.1). Момент її відносно осі Z :

$$M_z = F_{\perp}\, r \cdot sin\alpha = F_{\perp} \cdot r_{\perp},$$

де $r_{\perp}$ – плече сили $F_{\perp}$.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно осі Z називається добуток складовою цієї сили $F_{\perp}$, що лежить у площині, перпендикулярній до осі, на її плече.

Щоб знайти момент імпульсу тіла, що обертається навколо осі Z з кутовою швидкістю ω, розіб'ємо його подумки на N матеріальних точок масами m_i. Момент імпульсу кожної точки.

$L_{zi} = m_i \upsilon_i r_i = m_i r_i^2 \omega$, оскільки її швидкість $\upsilon_i = \omega r_i$, де r_i – відстань точки від осі обертання. Додаючи по усім точкам і виносячи за знак суми загальний множник ω, одержимо момент імпульсу тіла відносно осі Z:

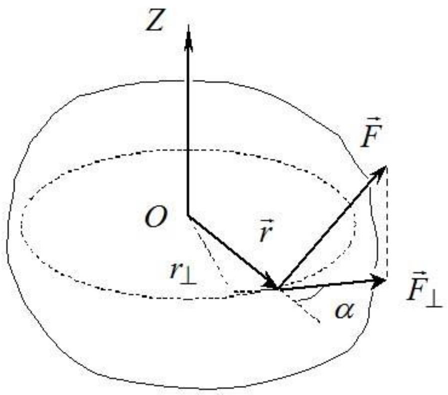

Рис.1

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega$$

Вираз у дужках називається *моментом інерції* тіла (ми вводили його в попередній лекції) відносно осі Z*:*

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

Звідси отримуємо, що момент імпульсу тіла, закріпленого на осі, дорівнює добутку моменту інерції на кутову швидкість:

$$L_z = I_z \omega .$$

Підставимо цей вираз в $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовніш}$, отримаємо

$$I_z \varepsilon = M_z ,$$

де $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення тіла, а M_z – проекція на вісь Z вектора моменту зовнішніх сил.

Отримане рівняння називається *основним рівнянням динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі*. За формою запису воно збігається з рівнянням динаміки поступального руху і є аналогом другого закону Ньютона.

Момент інерції характеризує інертність тіла при його обертанні. Кутове прискорення тіла $\varepsilon = M_z / J_z$ при заданному значенні M_z тим менше, чим більше його момент інерції J_z . Момент інерції виступає тут в ролі маси при поступальному русі. Однак на відміну від маси (див. нижче табл.) момент інерції залежить від конфігурації тіла, тобто від розподілу його маси навколо осі обертання.

Кінетична енергія твердого тіла при одночасному обертальному і поступальному русі.

Як було показано в попередній лекції кінетичну енергію обертання тіла можна представити у вигляді

$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на і скориставшись співвідношенням $L = I\omega$, цю формулу можна представити у вигляді

$$W_{вр} = \frac{L^2}{2I}.$$

Приймемо без доведення наступну теорему.

Теорема. *Кінетична енергія рухомого тіла дорівнює сумі кінетичної його енергії поступального руху і енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до напрямку його руху (теорема Кеніга):*

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{вр}.$$

Приклад.
Обчислимо кінетичну енергію котиться зі швидкістю по горизонтальній поверхні циліндра масою m. Будемо вважати, що рух відбувається без прослизання, тоді кутова швидкість обертання циліндра ω пов'язана з поступальною швидкістю центру мас v наступним (див. лекцію 2) чином

$$\mathrm{v} = \omega R,$$

де R - радіус циліндра.
Згідно з теоремою Кеніга

$$W_{кін} = W_{пост} + W_{обер}$$

де

$W_{пост} = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$ - поступальна кінетична енергія,

$W обер = \dfrac{I\omega^2}{2}$ - обертальна кінетична енергія.

Момент інерції диска (циліндра) відносно осі, що проходить через його центр мас і перпендикулярної до площини диска знаходимо з таблиці лекції № 6

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

а кутову швидкість ω знайдем из виразу

$$\omega = \mathrm{v}/R.$$

Потім отримаємо

$$W_{кин} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR^2(\mathrm{v}/R)^2}{2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{mR^2\mathrm{v}^2}{4R^2} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}^2}{4}$$

Остаточно

$$W_{кин} = \frac{2m\mathrm{v}^2}{4} + \frac{m\mathrm{v}^2}{4} = \frac{3m\mathrm{v}^2}{4}.$$

Для більшої наочної ясності наведемо аналогію між поступальними і обертальними величинами у вигляді таблиці.

Таблиця

Поступальний рух (прямолінійний)		***Обертальний рух (навколо нерухомої осі)***	
Координата	x	φ	кутова координата
Швидкість	$\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	кутова скорость
Прискорення	$a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$	кутовеускорение
Масса	m	I	момент інерції
Імпульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$	момент імпульса
Закон збереження імульсу (для двох тіл) $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{/} + \vec{p}_2^{/}$		Закон збереження моменту (для двох тіл) $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1^{/} + \vec{L}_2^{/}$	
Сила	$\vec{F}$	$\vec{M}$	момент сили
Рівняння руху	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$	рівняння руху
Робота	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$dA = \vec{M} \cdot \overrightarrow{d\varphi}$	робота
Кінетична енергія	$W_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	$W_{вр} = \dfrac{J\,\omega^2}{2}$	кінетична енергія
Рівноприскорений рух			
Прямолінійний		Круговий	
$s = \upsilon_0\, t + \dfrac{a\,t^2}{2}$, $\upsilon = \upsilon_0 + a\,t$, $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2a\,s$		$\varphi = \omega_0\, t + \dfrac{\varepsilon\, t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\,\varphi$	