Лекція №6.

Динаміка обертального руху

Розглянемо рух матеріальної точки по колу і на цьому прикладі введемо нові величини, які необхідні при описі обертального руху твердого тіла.

Нехай матеріальна точка масою m починає рух по колу радіусом R під дією сили F,яка завжди спрямована по дотичній до цього кола. Тоді, по теоремі про кінетичної енергії, робота цієї сили дорівнює кінетичній енергії, яку набуває матеріальна точка зі стану спокою:

$$A = F \cdot s = W_{кин} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2},$$

де s - шлях, який проходить матеріальна точка по колу при повороті на кут φ.

Перейдемо від лінійних величин до кутових $s = R\varphi$, $\mathrm{v} = \omega R$.

Отримуємо

$$F \cdot s = FR \cdot \varphi = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Нагадаємо, що добуток сили на плече називається **моментом сили**

$$M = FR,$$

де плечем є довжина перпендикуляра проведеного з точки, щодо якої здійснюється обертання до лінії дії сили.

Добуток маси матеріальної точки на квадрат радіусу кола, по якій здійснюється обертання, називається **моментом інерції** матеріальної точки:

$$I = mR^2.$$

Узагальнюючи введені поняття скажемо наступне:

1) робота при обертальному русі визначається виразом:

$$A = M \cdot \varphi$$

2) кінетична енергія при обертальному русі визначається виразом:

$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Якщо обертається система з N матеріальних точок жорстко пов'язаних між собою, то кінетична енергія визначається точно таким же виразом, в якому під моментом інерції розуміється наступне

$$I = m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \ldots + m_N r_N{}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i{}^2,$$

де m_i - маса i-ої матеріальної точки,

r_i - радіус обертання i-ої матеріальної точки.

Вільні осі і головні моменти інерції твердих тіл.

теорема Штейнера

Моменти інерції тіл правильної форми можуть бути задані аналітично. Для цього у формулі для моменту інерції слід перейти від підсумовування до інтегрування за обсягом тіла V :

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 d m .$$

Для однорідного тіла $d m = \rho dV$, де $\rho = m / V$ – його щільність. Тоді

$$I = \rho \int_V r^2 dV .$$

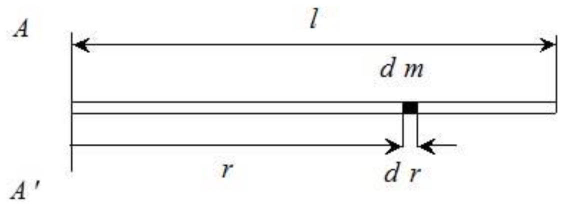
Як приклад знайдемо момент інерції однорідного тонкого стрижня довжиною l щодо перпендикулярної до нього осі, що проходить через один з його кінців (вісь AA' на мал. 1.). $d r$. Розіб'ємо стрижень на малі ділянки довжиною $dV = S\ d r$, де S – площа поперечного перерізу стержня.

Підставляючи елемент обсягу $dV = S\ d r$ в інтеграл отримаємо

$$I = \rho \int_0^l S r^2 d r = \frac{1}{3} \rho S$$

$$= \frac{1}{3} m l^2 ,$$

оскільки $\rho S l = \rho V = m$ – маса стержня.



Мал.1

Будь-яке тіло має три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр його мас,

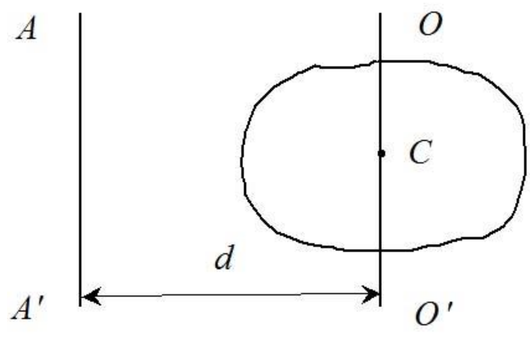
обертання навколо яких не супроводжується тиском на підшипники, що кріплять вісь.

Вони називаються вільними осями.

У тіла правильної форми ці осі збігаються з осями його симетрії.

Моменти інерції тіла щодо вільних осей I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}

називаються *головними моментами інерції*, а самі ці осі - *головними осями інерції.*



Мал.2

При обчисленні моментів інерції тіл використовують *теорему Штейнера*: *момент інерції*

I_A *тіла відносно деякої осі* AA' (мал.2) *дорівнює сумі моменту інерції тіла* I_C *відносно осі* OO', *що проходить через його центр мас* C *паралельно осі* AA', *і добутку маси тіла на квадрат відстані* d *між цими осями:*

$$I_A = I_C + md^2.$$

За допомогою теореми Штейнера знайдемо момент інерції однорідного стержня відносно осі, що проходить через його середину (центр мас). Оскільки в цьому випадку $d = l/2$, з теореми Штейнера слідує:

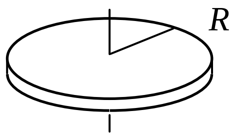
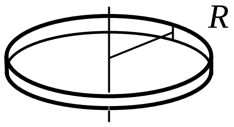
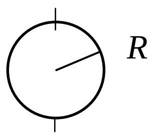
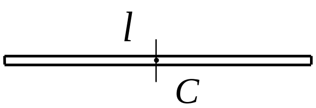
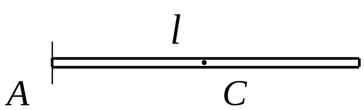
$$I_C = I_A - md^2.$$

Тоді

$$I_C = \frac{1}{3}ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2.$$

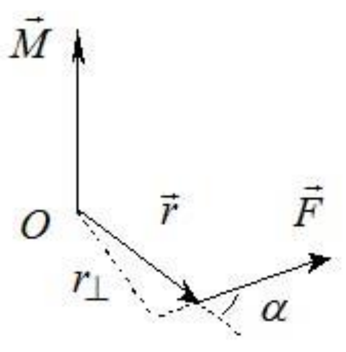
В табл. наведені моменти інерції однорідних тіл простої форми, обчислені з допомогою інтегрування.

Таблиця *Моментів інерції деяких тіл*

Тіло	*Малюнок*	*Момент інерції*
Циліндр або диск		$I_{цил} = \frac{1}{2}mR^2$
Обруч		$I_{обр} = mR^2$
Куля		$I_к = \frac{2}{5}mR^2$
Стержень		$I_C = \frac{1}{12}ml^2$
		$I_A = \frac{1}{3}ml^2$

Момент сили і момент імпульсу відносно нерухомого центру

Закони механіки обертального руху пов'язані з поняттями *моменту сили і моменту імпульсу*. Слід розрізняти моменти цих векторів відносно точки і відносно осі.



Мал.3

Нехай O – яка-небудь точка, яку назвемо *центром* або *полюсом обертання.* Позначимо $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений із цієї точки до точки прикладання сили $\vec{F}$ (Мал.3).

Моментом сили $\vec{F}$ *відносно полюса* O називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$ *на силу* $\vec{F}$ *:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} .$$

Модуль момента сили

$$M = r\,F\,sin\,\alpha = r_\perp F ,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а $r_\perp = r\,sin\alpha$ – *плече силе* – довжина перпендикуляра, опущенного з полюса O на ліню дії сили $\vec{F}$.

Моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки відносно полюса O називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, що з'єднує полюс з матеріальною точкою, на вектор її імпульсу $\vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} .$$

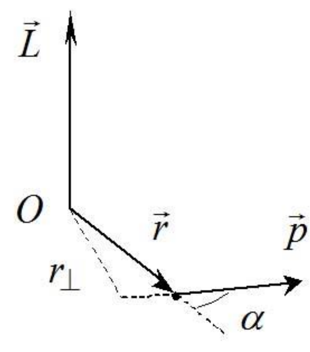
Якщо траєкторією частинки є окружність, то момент її імпульсу відносно центру кола:

$$L = m\upsilon r .$$

Момент імпульсу частинки, що рухається вздовж прямої лінії (Мал.4):

$$L = r\,p\,sin\alpha = r_\perp m\upsilon .$$

Якщо на частинку не діють сили, її швидкість не змінюється і момент імпульсу залишається постійним.



Мал. 4

Рівняння моментів

Розглянемо виведення формули рівняння моментів у самому простому випадку. Нехай матеріальна точка рухається по колу радіусом r тоді її імпульс (також як і швидкість) спрямований під кутом 90° до радіус-вектора і вираз для моменту імпульсу $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ можна написати в скалярному вигляді

$$L = r\ p .$$

Обчислимо похідну за часом від цього виразу

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = r\frac{dp}{dt},$$

де ми врахували, що при русі по колу модуль радіус-вектора не змінюється.
З другого закону Ньютона випливає, що

$$F = \frac{dp}{dt},$$

тоді

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot F .$$

В даному випадку добуток $r \cdot F$ визначає момент сили, що діє на матеріальну точку, тобто

$$M = r \cdot F .$$

Остаточно одержуємо рівняння моментів у скалярному вигляді

$$\frac{dL}{dt} = M .$$

Проведемо цю викладку у векторному вигляді. Продиференціюємо вираз $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ по часу:

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} .$$

Похідна радіуса-вектора $\vec{r}$ дорівнює швидкості матеріальної точки $d\,\vec{r}\,/\,d\,t = \vec{\upsilon}$, а оскільки вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{p}$ паралельні один одному, їх векторний добуток звертається в нуль. У другому доданок $d\,\vec{p}\,/\,d\,t = \vec{F}$, а векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ утворює момент сили $\vec{M}$. Тому

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \vec{M} .$$

Це співвідношення називається рівнянням моментів: похідна по часу моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центру дорівнює моменту діючої сили відносно того ж центра.