

ЛЕКЦІЯ 4

РОБОТА І ЕНЕРГІЯ

Уявлення про роботу, як і про сили, запозичене з нашого повсякденного досвіду, має у фізиці цілком певний сенс. Роботу вимірюють добутком сили, що діє на тіло в напрямку його переміщення, на модуль цього переміщення. Енергію вимірюють роботою, яку може зробити тіло.

У механіці вводяться поняття кінетичної і потенційної енергії. Їх сума за певних умов є постійною величиною, тобто зберігається в процесі руху тел. Принцип збереження механічної енергії часто дає можливість обійтися без застосування законів Ньютона і провести простим і швидким способом аналіз руху механічної системи. Викладення цих та пов'язаних з ними питань присвячена ця глава.

Робота постійної сили

Нехай тіло, на яке діє постійна сила, рухаючись по прямій, проходить шлях (рис.1). Роботою цієї сили називається добуток модуля сили на переміщення точки її прикладення і на косинус кута α між напрямком сили і напрямком переміщення:

$$A = F s \cos \alpha \quad (\vec{F} = \text{const}). \quad (1)$$

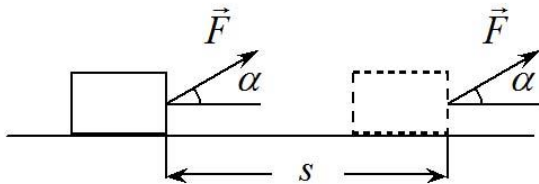


Рис.1

Одиницею вимірювання роботи в системі СІ служить джоуль (Дж). Це робота сили в 1 ньютон (Н) на шляху в 1 метр (при $\alpha = 0$):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

Праву частину формули (1) можна записати у вигляді *скалярного добутку* вектора сили \vec{F} і вектора переміщення \vec{s} :

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (2)$$

Скалярний добуток векторів

Поряд з операціями додавання, віднімання та множення вектора на скаляр, розглянутими раніше, можна ввести операцію множення двох векторів. Можна визначити дві різні дії множення векторів: множення скалярне і векторне множення.

Скалярним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається добуток модулів обох векторів, помножено на косинус кута між ними.

Будемо позначати скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} крапкою між ними. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (3)$$

Вживаються й інші позначення скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a} \vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}).$$

В результаті скалярного множення векторів виходить скаляр, тобто число, що і пояснює назву скалярного добутку.

В якості прикладу розглянемо камінь масою кинуте вертикально вниз з точки 1 на висоті h . В точці 2 він доторкається Землі. Яку роботу здійснює сила тяжіння за час польоту каменя?

Розв'язок. Так як сила тяжіння постійна і рівна $\vec{F} = m\vec{g}$, то її роботу знайдемо, обчисливши скалярний добуток (\vec{F}, \vec{s}) . Врахуємо, що рух вертикальний і $\alpha = 0$, тобто $\cos \alpha = 1$ тоді отримаємо:

$$A_{12} = (\vec{F}, \vec{s}) = mg \cdot s \cdot \cos \alpha = mg \cdot h,$$

де переміщення s збігається з висотою h . Насправді з більш складних міркувань випливає, що робота сили тяжіння завжди дорівнює mgh і не залежить від траєкторії руху.

Робота змінної сили

Якщо траєкторія рухомого тіла (матеріальної точки) не є прямою, а діюча на нього сила не постійна, то для обчислення роботи розіб'ємо весь шлях на прямолінійні відрізки $\Delta \vec{s}_i$ досить малої довжини, щоб діє на тіло на кожному з цих відрізків силу можна було вважати постійною (рис. 3.2). Роботу, чинену при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2, представимо у вигляді суми робіт на кожному з відрізків:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \Delta \vec{s}_i).$$

Виробляючи все більш дрібні розбиття, тобто спрямовуючи N до нескінченності, приходимо до інтегралу, обчислюваного вздовж траєкторії руху тіла

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}, d\vec{s}). \quad (4)$$

Такий інтеграл називається криволінійним, оскільки значення подын-

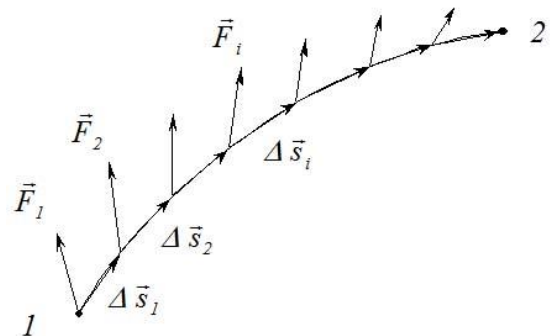


Рис.2

тегра-льної функції беруться в точках кривої (позначеної через L_{12}), вздовж якої рухається тіло.

Кінетична енергія. Теорема про зв'язок роботи і енергії

Кінетична енергія тіла вимірюється роботою, яку завдяки інерції може зробити рухоме тіло при його гальмуванні до повної зупинки. Кінетична енергія дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості:

$$W_{\kappa} = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Одиниця вимірювання кінетичної енергії - джоуль (Дж) - збігається з одиницею вимірювання роботи.

Покажемо, як пов'язані ці величини між собою. Згідно співвідношенню (4), робота, чинена результуючою силою:

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}_{\text{рез}}, d\vec{s}) = \int_{L_{12}} (m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} dt) = m \int_{L_{12}} (\vec{v}, d\vec{v}), \quad (3.6)$$

оскільки, за другим законом Ньютона, $\vec{F}_{\text{рез}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, а $d\vec{s} = \vec{v} dt$.

Нехай v – модуль вектора \vec{v} . Тоді $v^2 = \vec{v}^2$ і диференціал від обох частин цієї рівності $\vec{v} d\vec{v} = v dv$. Після підстановки в (6) отримаємо

$$A_{12} = m \int_{L_{12}} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (7)$$

Ми довели теорему про зв'язок роботи і енергії: робота, чинена діючою на тіло результуючою силою, дорівнює збільшенню його кінетичній енергії:

$$A_{12} = \int_{L_{12}} (\vec{F}_{\text{рез}}, d\vec{s}) = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1}, \quad (8)$$

де $W_{\kappa 1}$ и $W_{\kappa 2}$ – кінетична енергія тіла відповідно у початковій і кінцевій точках шляху.

Консервативні та неконсервативні сили

У механіці поряд з кінетичною енергією вводиться поняття потенційної енергії. Тіло може мати потенційну енергію, якщо на нього діють консервативні сили.

Вище було показано (див. приклад), що при переміщенні тіла робота сили тяжіння визначається тільки висотою над рівнем Землі початкової і кінцевої точок його шляху і не залежить від форми траєкторії. Крім сили тяжіння цією же властивістю володіють і інші фундаментальні сили природи - електромагнітні, ядерні і слабкі.

Дамо тепер наступне визначення: якщо робота сили, що діє на тіло, не залежить від форми траєкторії його руху, а визначається тільки координатами початку і кінця шляху, то ця сила називається консервативною. Зокрема, якщо тіло, пройшовши в поле консервативної сили по замкнутій траєкторії, повертається у вихідну точку, то повна робота цієї сили на всьому шляху дорівнює нулю.

До неконсервативних сил ставляться сили тертя і так звані гіроскопічні сили - сила Лоренца, що діє на заряд, що рухається в магнітному полі, і сила Коріоліса, яка виникає в обертових системах відліку. Обидві ці сили спрямовані перпендикулярно вектору швидкості тіла і не роблять роботи. Робота сил тертя завжди негативна.

Потенціальна енергія. Закон збереження енергії в механіці

Використовуючи поняття консервативної сили, можна дати визначення потенційної енергії. Яке-небудь положення тіла в просторі умовно приймається за нульове. Тоді робота, яку здійснюють консервативні сили при переміщенні тіла з положення 1 в нульове, називається потенційна енергія тіла в цьому положенні:

$$W_p = A_{10}. \quad (9)$$

Потенційна енергія є запасуюча енергія, яка може бути перетворена в роботу, кінетичну енергію або інші види енергії, не розглядаються в механіці, наприклад у внутрішню (теплову) енергію.

З визначення випливає:

1. Потенційна енергія при незмінних зовнішніх умовах залежить лише від координат тіла (матеріальної точки):

$$W_p = W_p(x, y, z).$$

2. Потенційна енергія визначається не однозначно, а з точністю до постійного доданка, оскільки залежить від вибору нульового положення. Фізичний сенс має різниця потенціальних енергій тіла в будь-яких двох точках простору.

3. Робота консервативних сил при переміщенні тіла з однієї точки простору в іншу дорівнює зменшенню його потенційної енергії:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \quad (10)$$

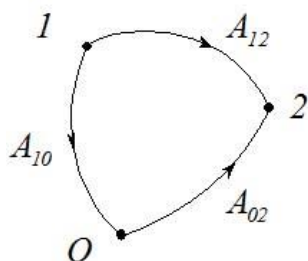


Рис.3

Покажемо це. Нехай потенційна енергія визначена відносно точки О (рис.3). В силу незалежності роботи від форми шляху робота

A_{12} при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2 по короткому шляху дорівнює роботі переміщення тіла по шляху, що проходить через точку O :

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}.$$

Але $A_1 \neq W$, а $A_{02} = -A_{20} = -W_{p2}$, звідки і випливає рівність (10).

Роботу консервативних сил можна виразити і через зміну кінетичної енергії тіла. По теоремі про зв'язок роботи і енергії (7) ця робота дорівнює приросту кінетичної енергії тіла: $A_{12} = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1}$. Таким чином,

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1}, \quad (11)$$

звідки слідує, що

$$W_{\kappa 1} + W_{p1} = W_{\kappa 2} + W_{p2}. \quad (12)$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії тіла називається його *повною механічною енергією*:

$$W = W_{\kappa} + W_p. \quad (13)$$

Рівняння (12) виражає закон збереження енергії в механіці:

$$W = W_{\kappa} + W_p = \text{const}. \quad (14)$$

Якщо на тіло діють тільки консервативні сили, то його повна механічна енергія залишається постійною: можуть відбуватися лише перетворення потенційної енергії в кінетичну і назад, але повний запас енергії тіла не змінюється. Замкнутою системою називається сукупність тіл, на які не діють зовнішні сили. Якщо між тілами такої системи діють тільки консервативні сили, то вона називається консервативною. Повна механічна енергія замкнутої консервативної системи тіл зберігається в часі.

Якщо поряд з консервативними силами на тіло діє і сила тертя, то, як випливає з рівняння (11), при переході тіла з положення в положення частину його потенційної енергії піде на здійснення роботи з подолання сили тертя:

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1} + |A_{mp}|,$$

чи

$$W_{\kappa 2} + W_{p2} = W_{\kappa 1} + W_{p1} - |A_{mp}|,$$

Тобто, повна механічна енергія тіла зменшується на величину цієї роботи, яка перетворюється в тепло:

$$W_1 - W_2 = |A_{mp}|.$$