Лекція №1
КІНЕМАТИКА
Кінематика матеріальної точки

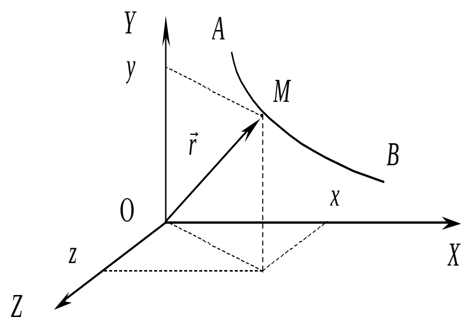
Найпростішим об'єктом, рух якого вивчає класична механіка, є матеріальна точка. *Матеріальною точкою в механіці називається тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати.* Планети, що обертаються навколо Сонця, можна вважати матеріальними точками, оскільки розміри планет, хоч би якими великими вони не були, все ж дуже малі в порівнянні з їх відстанями до Сонця. Снаряд, випущений з гармати, також може бути прийнятий за матеріальну точку.

Механіка точки є основою для вивчення механіки взагалі, так як довільне тіло можна розбити на малі пов'язані один з одним макроскопічні частини, кожну з яких можна вважати матеріальною точкою. Зокрема, *абсолютно твердим тілом називають сукупність матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла залишаються незмінними.* При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії. Тому часто в подальшому, поки мова не йде про обертання, рухому матеріальну точку ми будемо називати тілом.

Радіус-вектор

Тіло, щодо якого визначається положення інших тіл, називаються тілом відліку. В якості тіла відліку найчастіше використовують Землю, з якою пов'язують прямокутну *декартову систему координат* (мал. 1). Відрізки x, y, z відсікаються на осях координат перпендикулярними до них площинами, що проходять через точку M, називаються *координатами точки M*.

Рух точки повністю описано, якщо відомо її положення в любий момент часу щодо обраної системи координат. Положення матеріальної точки задається в просторі трьома координатами (на площині - двома) або вектором $\vec{r}$ (див. Мал.). **Радіус-вектор** - *вектор проведений з початку системи координат в цю точку.* Очевидно, що $\vec{r}$ - радіус-вектор. Щоб описати рух матеріальної точки, необхідно знайти три функції:



Мал. 1

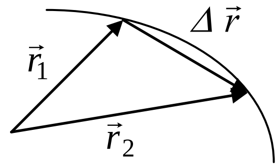
$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \qquad \text{або} \qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Траєкторією *називається сукупність послідовних положень точки, тобто лінія, яку вона описує в просторі при своєму русі* (на мал. 1 - це дуга AB).

Система рівнянь (1) задає траєкторію точки в *параметричному вигляді*, де в якості параметра виступає час t.

Шлях - *довжина траєкторії.*

Зауважимо, що шлях це скалярна фізична величина, тобто величина, яка не має напряму. Якщо відомо, що матеріальна точка пройшла шлях рівний 3 км, то ми все одно нічого не знаємо про характер руху, тобто матеріальна точка могла весь час рухатися від нас і зараз знаходиться на відстані 3 км. Могла пройти деяку дистанцію і повернутися до нас або взагалі весь час кружляла навколо нас.
Як правило, шлях позначають буквою S. Шлях є не спадною величиною залежною від часу $S(t)$. Тобто з часом шлях або залишається незмінним, якщо тіло знаходиться в стані спокою, або збільшується, якщо тіло рухається. Прикладом ситуації, в якій нас цікавить шлях, є свідчення пробігу в автомобілі.
Інший величиною, що характеризує рух є переміщення.



Переміщення - *векторна фізична величина що дорівнює різниці двох радіус- векторів проведених в перше і в друге положення*

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Таким чином переміщення показує, не тільки як далеко тіло зрушила з точки 1 в точку 2, але і напрямок цього зсуву. При цьому нам абсолютно байдужа траєкторія руху, тобто тіло могло переміститися по прямій з точки 1 в точку 2, а могло з точки 1 відправитися на Місяць, а потім в точку 2. Переміщення в обох випадках буде однаковим. Переміщення, як і шлях, вимірюється в SI в метрах $[\Delta\vec{r}] = [S] = \text{м}$.

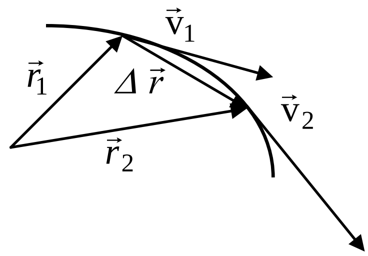
Швидкість.

Швидкість - *характеристика зміни положення тіла.*
З визначення швидкості відразу випливає, що якщо положення тіла не змінюється, то швидкість дорівнює нулю.
Якщо за час Δt тіло пройшло шлях ΔS, то кажуть, що тіло рухалося із середньою швидкістю $v_{сер}$

$$v_{сер.шлях.} = \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Якщо за час Δt тіло вчинила переміщення $\Delta\vec{r}$, то кажуть, що тіло рухалося із середньою швидкістю по переміщенню $v_{сер\ пер.}$

$$\vec{v}_{сер.пер.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} .$$



Зауважимо, що путевáя швидкість є скаляром, тоді як швидкість по переміщенню вектором.
Спрямуємо час, тоді операція відносини (ділення) заміниться на операцію похідною. У цьому випадку говорять про миттєву швидкості

.

Так як за нескінченно малий час dt вектор переміщення

$d\vec{r}$ по модулю дорівнює dS, тобто $|d\vec{r}| = dS$, то $|\vec{\text{v}}_{\text{пер.}}| = \text{v}_{\text{пут.}}$ тому для миттєвих швидкостей індекс, що вказує на шлях або переміщення опускають.
Приймемо без доведення, що вектор швидкості $\vec{\text{v}}$ спрямований по дотичній до траєкторії в кожній її точці. Очевидно, що будь-яка швидкість вимірюється в SI в метрах за секунду.

$$[\text{v}_{\text{сер.шлях.}}] = [\vec{\text{v}}_{\text{сер.пер.}}] = [\vec{\text{v}}] = м/с.$$

Прискорення.

Прискорення - *характеристика зміни швидкості тіла.*
З визначення прискорення відразу випливає, що якщо швидкість тіла не змінюється, то прискорення дорівнює нулю.
Якщо за час Δt тіло змінило свою швидкість на $\Delta\vec{\text{v}} = \vec{\text{v}}_2 - \vec{\text{v}}_1$, то кажуть, що тіло рухалося із середнім прискоренням $\vec{a}_{\text{ср}}$

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\text{v}}}{\Delta t}.$$

Границя відношення $\Delta\vec{\text{v}}$ до Δt при $\Delta t \to 0$ називається *прискоренням*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\text{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\text{v}}}{dt} = \dot{\vec{\text{v}}}(t).$$

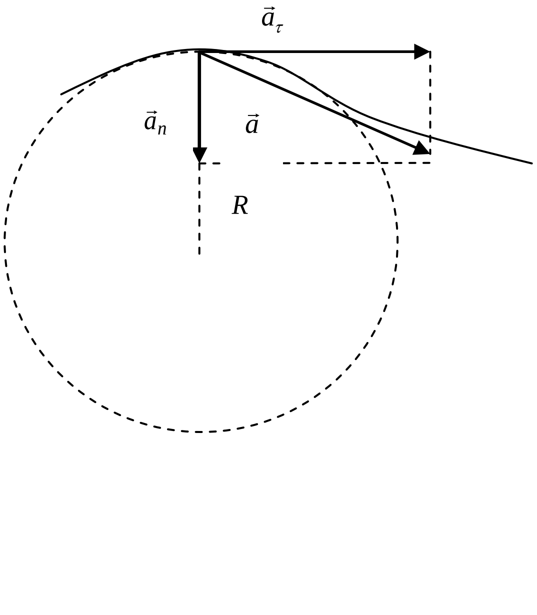
Вектор прискорення $\vec{a}$ можна розкласти (див. мал.) на дві компоненти: $\vec{a}_\tau$, паралельну вектору $\vec{\text{v}}$ і $\vec{a}_n$ перпендикулярну йому:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Компонента $\vec{a}_\tau$ називається *тангенціальним прискоренням* частинки і показує швидкість зміни модуля її швидкості $|\vec{\text{v}}|$

$$a_\tau = \frac{d|\vec{\text{v}}|}{dt} = \frac{d\text{v}}{dt},$$

Компонента $\vec{a}_n$ показує зміну швидкості у напрямку і називається *нормальним прискоренням*, тобто спрямованим по нормалі до вектора швидкості $\vec{\text{v}}$. Можна показати, що нормальне прискорення визначається виразом



$$a_n = \frac{\text{v}^2}{R},$$

де R - *радіус кривизни* траєкторії в будь-якій її точці, v - модуль швидкості частинки в цій точці.
Радіус кривизни R дорівнює радіусу кола, дотичній до траєкторії в даній точці (мал).

Оскільки радіус такої окружності змінюється при переході від однієї точки до іншої, він називається *миттевим радіусом кривизни* траєкторії.
Вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований уздовж вектора $\vec{v}$ якщо швидкість збільшується по модулю і в протилежну сторону - якщо швидкість зменшується. Вектор $\vec{a}_n$ завжди спрямований по радіусу до центру кривизни (див. мал.).
Розмірність прискорення безпосередньо випливає з визначення

$$[\vec{a}_{\text{ср}}] = \frac{[\Delta \vec{v}]}{[\Delta t]} = \frac{м/с}{с} = \frac{м}{с^2}.$$

Найпростіші приклади.

<u>Приклад 1.</u> Матеріальна точка рухається прямолінійно з постійним прискоренням $a = const$ (рівноприскореного руху). Знайти залежність координати і швидкості від часу за умови, що в початковий момент часу її координата $x(0) = x_0$, а швидкість $\upsilon(0) = \upsilon_0$.

<u>Рішення.</u> У разі одновимірного прямолінійного руху радіус-вектор $\vec{r}(t)$ замінюється на координату $x(t)$. Щоб знайти залежність $x = x(t)$, скористаємося виразами

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \text{ і } a(t) = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

З першого виразу випливає що $dx = \upsilon(t)dt$ або

$$x(t) = \int \upsilon(t)\,dt$$

З другого – витікає що $d\upsilon = a(t)dt$ або

$$\upsilon(t) = \int a(t)\,dt$$

Тоді, при $a = const$ маємо (з другого виразу)

$$\upsilon(t) = \int a \cdot dt = a\int dt = a \cdot t + c_1 = \upsilon_0 + a \cdot t,$$

де константа c_1 визначається з початкових умов $\upsilon(0) = \upsilon_0$.
Підставляючи знайдений вираз в $x(t) = \int \upsilon(t)\,dt$ отримаємо

$$x(t) = \int \upsilon(t)\,dt = \int (\upsilon_0 + a \cdot t)\,dt = \upsilon_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2} + c_2$$

Константу c_2 знаходимо з умови $x(0) = x_0$, тоді $c_2 = x_0$ і ми отримуємо

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0\, t + \frac{a\, t^2}{2}.$$

Оскільки $S(t) = x - x_0$ пройдений шлях, вона набуває вигляду

$$S(t) = \upsilon_0\, t + \frac{a\, t^2}{2}.$$

При рівноприскореному русі ($a = const$) середнє значення швидкості є

$$\upsilon_{cp} = \frac{s}{t} = \upsilon_0 + \frac{at}{2} = = \frac{2\upsilon_0 + at}{2} = \frac{\upsilon_0 + (\upsilon_0 + at)}{2} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}.$$

Розглядаючи рівняння

$$\frac{s}{t} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$$

спільно з рівнянням $\upsilon - \upsilon_0 = at$ знаходимо $t = (\upsilon - \upsilon_0)/a$ і підставляємо в перший

$$\frac{s}{(\upsilon - \upsilon_0)/a} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$$

отримаємо формулу, що зв'язує кінцеву і початкову швидкість руху, прискорення і пройдений шлях:

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2as .$$

Запишемо основні формули прямолінійного рівноприскореного (рівнозмінного) руху

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + a \cdot t,$$

$$a = const .$$

.

Зауважимо, що константи x_0, υ_0, a можуть бути як позитивними, так і негативними.

<u>Приклад 2.</u> Матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно тобто з постійною швидкістю $\upsilon = \upsilon_0 = const$. Знайти залежність координати від часу за умови, що в початковий момент часу її координата $x(0) = x_0$.

<u>Рішення.</u> Поклавши в попередньому прикладі $a = 0$ знаходимо

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t.$$