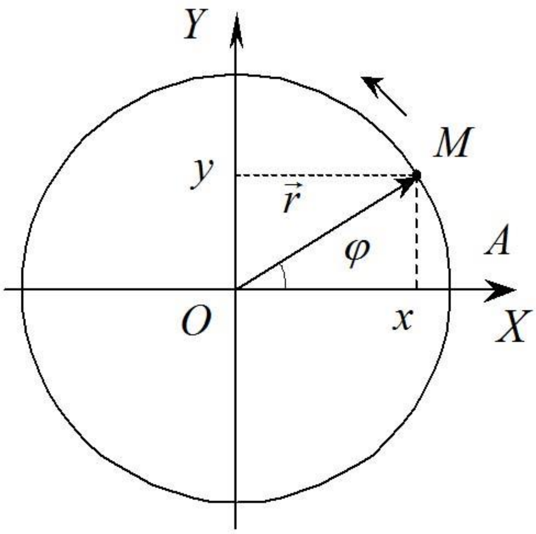
Лекція №2

Кінематика обертального руху

Рух матеріальної точки по колу

Розглянемо обертання матеріальної точки M по колу радіуса r (мал.1). В момент часу $t = 0$ вона перебувала в точці A. Радіус-вектор $\vec{r}$, проведений з початку координат до точки M, за час t повернувся на кут φ. З малюнка видно, що координати точки:



$$x = r \cdot cos\,\varphi, \qquad (1a)$$

$$y = r \cdot sin\,\varphi. \qquad (1б)$$

Модуль радіуса-вектора $r = |\vec{r}\,|$ і кута φ, який він складає з віссю X, називають *полярними координатами* точки, а співвідношення (1) дають зв'язок декартових координат x і y з полярними. В нашому випадку $r = const$ і положення точки M на колі визначається тільки однією полярною координатою – кутом φ.

Кутова швидкість ω, з якою обертається радіус-вектор точки, дорівнює похідній φ за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2)$$

Вона вимірюється в радіанах в секунду, а розмірність – секунда у мінус першому степені

$$[\,\omega\,] = 1\,/\,с = с^{-1}.$$

(Так відбувається, тому що радіани це безрозмірні величини, 1 радіан – центральний кут, довжина стягуючої дуги яка дорівнює радіусу).

Кутове прискорення ε, з яким обертається радіус-вектор, дорівнює похідній його кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (3)$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення – радіан на секунду за секунду, а розмірність - секунда у мінус 2 ступені

$$[\,\varepsilon\,] = рад\,/\,с^2 = с^{-2}.$$

Кут повороту φ можно найти, если известна угловая скорость ω:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega\, dt, \tag{4}$$

а кутова швидкість ω – по відомому кутовому прискоренню ε:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon\, dt, \tag{5}$$

де φ_0 і ω_0 – константи інтегрування, рівні відповідно куту повороту та кутової швидкості у момент часу $t = 0$.

За аналогією з поступальним рухом визначимо *середню кутову швидкість* і *середнє кутове прискорення:*

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{7}$$

де $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ – відповідно приріст кута φ і кутової швидкості ω за проміжок часу Δt.

Звернення точки по колу є рівномірним, якщо її швидкість змінюється лише за напрямком, залишаючись постійною за модулем. У цьому випадку тангенціальна складова прискорення $a_\tau = d\upsilon / dt = 0$, а нормальна $a_n = \upsilon^2 / r$. Вона називається *доцентрове* прискорення (при цьому радіус кривизни траєкторії r дорівнює радіусу кола).

Оскільки кутова швидкість рівномірного обертання радіуса-вектора точки постійна ($\omega = const$), із формули (4) слідує залежність кута φ від часу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{8}$$

де φ_0 – кут повороту в початковий момент часу.

Вважаючи для простоти $\varphi_0 = 0$, знайдемо звідси кутову швидкість

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (\text{ при } \varepsilon = 0). \tag{9}$$

Нехай точка, рівномірно рухається по колу, за час t здійснює N обертів. Тоді число обертів за одиницю часу, називається частотою ν її обертання по колу:

$$\nu = \frac{N}{t}. \quad (10)$$

Періодом обертання матеріальної точки T називається час, за який вона робить один оборот:

$$T = \frac{t}{N}. \quad (11)$$

Період і частота – взаємно зворотні величини:

$$T = \frac{1}{\nu}. \quad (12)$$

Одиниця вимірювання періода $[\ T\ ] = c$, частоти $[\nu\,]$ = 1/с (*оберт в секунду*).

Якщо точка здійснила N обертів, то кут повороту її радіуса-вектора $\varphi = 2\pi N$, а його кутова швидкість $\omega = \varphi / t = 2\pi N / t$. Підставляючи сюди N / t із формули (4.10), отримаємо зв'язок кутової швидкості ω з частотою обертання ν і періодом T:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (13)$$

Швидкість точки υ при руху її по колу прийнято називати *лінійною швидкістю*, щоб відрізняти її від кутової швидкості ω, яку називають також *круговою частотою*. Здійснюючи N обертів за час t, матеріальна точка проходить відстань $s = 2\pi r \cdot N$ ($2\pi r$ – довжина кола). Тоді її лінійна швидкість $\upsilon = s / t$, з урахуванням рівнянь (10) і (13), виражається через кутову швидкість:

$$\upsilon = \omega \cdot r. \quad (14)$$

Ця формула справедлива і тоді, коли точка рухається по колу з прискоренням. Диференціюючи (14) за часом при умові $r = const$, отримаємо тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r. \quad (15)$$

Доцентрове прискорення a_n також може бути виражено через кутову швидкість:

$$a_n = \upsilon^2 / r = \omega^2 r. \quad (16)$$

Швидкість точки $\vec{\upsilon}$, як і радіус-вектор $\vec{r}$, проведений до неї з центра кола векторні величині. Вісь обертання перпендикулярна обом цим векторам і має певний напрям у просторі. Щоб визначити цей напрям і зв'язати зазначені вектори, вводять поняття аксіального вектора і векторного добутку векторів.

Векторне добуток векторів

(математичний відступ)

Скалярне множення векторів, розглянуте в попередньому розділі, дає скалярну величину. Тепер ми розглянемо векторне множення двох векторів, у результаті якого виходить новий вектор.

Векторним множенням двох векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *називається вектор* $\vec{c}$*, модуль якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$*. Вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний до площини цих векторів і спрямований в таку сторону, щоб поворот від вектора* $\vec{a}$ *до вектора* $\vec{b}$ *по найкоротшому шляху навколо отриманого вектора* $\vec{c}$ *відбувалося в ту ж сторону, що і обертання по найкоротшому шляху від вісі* X *до вісі* Y *навколо вісі* Z (мал.2).

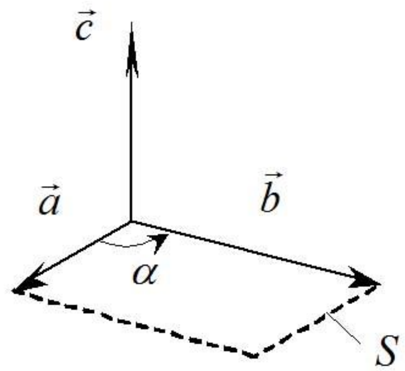
З визначення випливає, що напрям вектора $\vec{c}$ збігається з напрямком руху правого гвинта в правій системі координат (див. мал.2).

Векторне множення $\vec{a}$ на $\vec{b}$ позначається косим хрестом або квадратними дужками:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

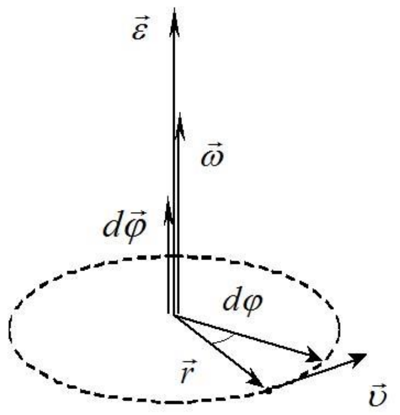
Модуль вектора $\vec{c}$, по визначенню, $c = a\,b\,sin\;(\vec{a},\vec{b}\,)$,

оскільки площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $S = a\,b\,sin\;\alpha$ (α − кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$).



Векторні вираження швидкості і прискорення обертаючої точки

Поворот на нескінченно малий кут $d\varphi$ радіуса-вектора $\vec{r}$ точки, що рухається по колу (див. мал.1), можна уявити вектором $\overrightarrow{d\varphi}$, спрямованим уздовж осі обертання в ту сторону, куди рухається гвинт, що обертається по напрямку руху точки. У правій системі координат вектор $\overrightarrow{d\varphi}$ направлений так, як показано на мал.3.



Мал.3

Кутову швидкість обертання радіуса-вектора, визначену вище формулою (2), також можна представити у вигляді аксіального вектора, паралельної вектору $\overrightarrow{d\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}. \tag{17}$$

Швидкість точки, як видно з мал.3, дорівнює векторному добутку $\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, а її модуль збігається з виразом (14).

Так як $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}.$$

Можна показати, що вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки в одну сторону зі швидкістю, якщо обертання прискорене, і в протилежну сторону, якщо воно уповільнене, а вектор $\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ спрямований по радіусу до осі обертання. Тому перший з них є вектор обертального тобто тангенціального прискорення

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

а другий – доцентрового (нормального) прискорення точки:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}.$$

Доцентровому прискоренню a_n можна придати інший вид:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}),$$

де ми використовували формулу «бац» мінус «цаб».

У випадку, якщо $\vec{\omega}$ перпендикулярна до $\vec{r}$ (як на мал.3), то $(\vec{\omega}, \vec{r}) = 0$ і ми отримаємо:

$$\vec{a}_n = -\vec{r}\omega^2,$$

де знак «–» показує, що нормальне прискорення і вектор $\vec{r}$ направлені в протилежні сторони.