

ЛЕКЦІЯ № 5

Удари

Удар – це зіткнення двох або більше тіл, коли взаємодія продовжується дуже короткий час.

При ударі в тілах виникають такі значні внутрішні сили, що зовнішніми силами, які діють на них, можна знехтувати. Це дозволяє розглядати ці тіла як замкнуту систему і застосовувати до неї закони збереження.

Удар називається центральним, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри мас. Кожен інший удар – не центральний.

Абсолютно непружний удар

Абсолютно непружним називають такий удар, після якого швидкості обох тіл що зіштовхуються виявляються однаковими. Щоб це стало можливим, тіла що зіштовхуються повинні володіти такими властивостями, так як сили, що виникають при їх деформації, залежать не від величини деформації, а від швидкості зміни деформації. Такі властивості притаманні, наприклад, м'якій глині, пластиліну. При непружному зіткненні відбувається наступне. У початковий момент удару швидкість деформації велика (куль стискаються), тому виникають значні сили, що надають обом кулям прискорення, яке спрямоване в протилежні сторони. По мірі розвитку удару швидкості деформації куль зменшуються, а самі деформації збільшуються до тих пір, поки швидкості куль виявляються рівними. У цей момент деформації куль перестануть змінюватися, зникнуть сили, і обидві кулі будуть рухатися з однаковою швидкістю. При абсолютно непружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії. Механічна ж енергія тіл до удару більше ніж після удару, так як вона частково (або повністю) переходить у внутрішню енергію тіл і витрачається на роботу деформації тіл. Для визначення швидкості тіл після взаємодії розглянемо удар двох кульок (матеріальних точок), що утворюють замкнену систему. Маса куль m_1 і m_2 , швидкості до удару \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Згідно із законом збереження сумарний імпульс куль до удару повинен бути таким же, як після удару:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

де \vec{u} - швидкість після удару, однакова для обох куль. З рівняння слідує, що:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Закон збереження механічної енергії для непружного удару не виконується, проте ми можемо написати:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 + W_{\text{випрам}}$$

де $W_{\text{випрам}}$ - втрати механічної енергії в системі.

Для конкретних розрахунків швидкості потрібно спроектувати співвідношення імпульсів на обрані напрямки. Якщо до удару швидкості куль спрямовані вздовж прямої, що проходить через їх центри, удар називають центральним. Швидкість куль після такого удару буде спрямована на тій же прямій. Тому рівняння збереження імпульсів можна розглядати як скалярний. Але швидкості при цьому треба вважати однаковими за знаком, коли вони спрямовані в одну сторону і протилежними за знаком, коли вони спрямовані в протилежні сторони. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Кулі рухаються в одному напрямку. Удар можливий, якщо швидкості \vec{v}_1 і \vec{v}_2 різні. Наприклад, $\vec{v}_2 > \vec{v}_1$, тобто друга куля наздоганяє першу. Після удару кулі будуть рухатися в ту ж сторону зі швидкістю більшою, ніж швидкість першої кулі і меншою, ніж швидкість другої

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

2. Кулі рухаються назустріч один одному. Після удару кулі будуть рухатися разом в ту сторону, в яку рухалась куля, що володіє більшим імпульсом, тобто

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} .$$

Якщо імпульси обох куль рівні за величиною, то після удару обидві кулі зупиняться.

Пружне зіткнення

Під час удару тіла деформуються. Суть пружного удару полягає в тому, що кінетична енергія відносного руху контактуючих тіл на короткий час перетворюється в енергію пружної деформації, яка в свою чергу переходить знову в кінетичну енергію руху. За рахунок чого має місце перерозподіл енергії між контактуючими тілами.

Абсолютно пружний удар - зіткнення двох тіл під час якого зберігається не тільки геометрична сума імпульсів, а й сума кінетичних енергій взаємодіючих тіл, тобто виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії.

Позначимо швидкості куль масами m_1 і m_2 до удару через \vec{v}_1 і \vec{v}_2 , після удару - через \vec{u}_1 і \vec{u}_2 . Закони збереження імпульсу та енергії мають вигляд:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Розглянемо центральний удар у якому одна куля наздоганяє іншу, тоді проекції векторів співпадають з векторами і можна записати

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}.$$

Скоротимо на двійку та перегрупуємо додатки

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \end{cases}.$$

Скориставшись першим рівнянням перепишемо друге як

$$m_2 (u_2 - v_2)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2).$$

Після скорочення маємо

$$u_1 = u_2 + v_2 - v_1.$$

Використавши цей зв'язок між швидкостями отримуємо із першого рівняння

$$m_1 (v_1 - u_2 - v_2 + v_1) = m_2 (u_2 - v_2) \text{ або } 2m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2 = u_2 (m_2 + m_1).$$

Звідси отримуємо

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Тоді для u_1 одержимо

$$u_1 = u_2 + v_2 - v_1 = \frac{2m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} + v_2 - v_1 = \frac{2m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1) + v_2 (m_2 + m_1) - v_1 (m_2 + m_1)}{m_2 + m_1}$$

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}.$$

Треба відзначити що коли кулі рухаються на зустріч то закон збереження імпульсу та енергії має вигляд

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}.$$

Рішення цієї системи рівнянь є

$$u_1 = \frac{-2m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 - v_2 (m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Розглянемо деякі окремі випадки зіткнень:

1. Рівні маси $m_1 = m_2 = m$.

1.а. Перша частинка наздоганяє другу $v_1 > v_2$

$$u_1 = \frac{2m \cdot v_2}{m + m} = v_2,$$

$$u_2 = \frac{2m \cdot v_1}{m + m} = v_1.$$

Тобто частинки обмінюються швидкостями, і після удару друга частинка віддаляється від першої.

1.б. Частинки рухаються на зустріч одна одній.

$$u_1 = \frac{-2mv_2}{m + m} = -v_2$$

$$u_2 = \frac{2mv_1}{m + m} = v_1.$$

Після удару частинки рухаються в протилежні сторони, перша частка зі швидкістю другий до удару, а друга зі швидкістю першої.

1.в. Друга частинка до удару нерухома, тоді $v_2 = 0$ і ми знаходимо

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = v_1.$$

Тобто після зіткнення перша частинка зупиняється, а друга починає рухатися зі швидкістю першої.

2. Рівні швидкості. Частинки рухаються назустріч один одному.

$$u_1 = \frac{-2m_2v + v(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \frac{-2m_2v + vm_1 - vm_2}{m_2 + m_1} = \frac{-3m_2v + vm_1}{m_2 + m_1} = v \frac{m_1 - 3m_2}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1v - v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1v - vm_2 + vm_1}{m_2 + m_1} = v \frac{3m_1 - m_2}{m_2 + m_1}.$$

3. Нерухомий другий шар до зіткнення.

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1},$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_2 + m_1}.$$

Якщо маса першого кулі більше другого, то вона продовжить рух в тому ж напрямі, якщо менше, то покотиться назад. Другий шар після зіткнення почне рухатися.

4. Перша куля стикається з нерухомою другою кулею нескінченної маси, тобто $v_2 = 0$ і $m_2 \rightarrow \infty$. Тоді

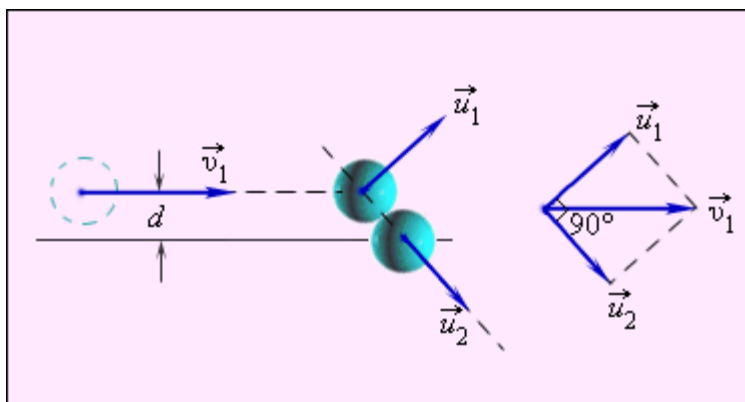
$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = v_1 \frac{m_1/m_2 - m_2/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \rightarrow v_1 \frac{0 - 1}{1 + 0} = -v_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \rightarrow \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Тобто перший м'яч відскакує назад з тією ж самою швидкістю.

Нецентральний пружний удар

Окремим випадком нецентрального пружного удару може служити зіткнення двох більярдних куль однакової маси, один з яких до зіткнення був нерухомий, а швидкість другого була спрямована не по лінії центрів куль (Мал. 1).



Мал. 1. Нецентральне пружне зіткнення куль однакової маси, d – прицільна відстань

Після нецентрального зіткнення кулі розлітаються під деяким кутом один до одного. Для визначення швидкостей \vec{u}_1 і \vec{u}_2 після удару потрібно знати положення лінії центрів в момент удару або прицільну відстань d (Мал. 1), тобто відстань між двома лініями, проведеними через центри куль паралельно вектору швидкості v_1 налітаючої кулі. Якщо маси кульок однакові, то вектори швидкостей \vec{u}_1 і \vec{u}_2 куль після пружного зіткнення завжди спрямовані перпендикулярно один до одного. Це легко показати, застосовуючи закони збереження імпульсу та енергії.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

При $m_1 = m_2 = m$ і $\vec{v}_2 = 0$ ці закони приймають вид:

$$\begin{cases} m \vec{v}_1 = m \vec{u}_1 + m \vec{u}_2 \\ \frac{m v_1^2}{2} = \frac{m u_1^2}{2} + \frac{m u_2^2}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 \end{cases}$$

Перше з цих рівностей означає, що вектори швидкостей \vec{v}_1 , \vec{u}_1 і \vec{u}_2 утворюють трикутник (діаграма імпульсів), а друге – що для цього трикутника справедлива теорема Піфагора, тобто він прямокутний. Кут між катетами і дорівнює 90° .