

Лекция №4

Работа газа при различных процессах.

В предыдущих лекциях мы получили, что общая формула для работы, которую выполняет газ, имеет вид

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (1)$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что работа определяется площадью криволинейной трапеции в осях (p, V) . Т.о., в общем случае, для нахождения работы нужно производить интегрирование. Рассмотрим конкретные примеры.

Работа газа при изохорном процессе.

Для изохорного процесса $V = \text{const}$, следовательно $dV = 0$. Это означает, что при изохорном процессе газ работу не выполняет

$$A = 0.$$

Работа при изобарном расширении идеального газа

Работу, совершаемую газом при изобарном расширении, можно найти, подставив постоянное значение давления газа p_1 (или p_2 , так как $p_1 = p_2$) в уравнение (1). Получим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1) = p_1 \Delta V. \quad (2)$$

Эта работа численно равна площади прямоугольника $V_1 1 2 V_2$ на Vp -диаграмме изобарного процесса (рис. 1).

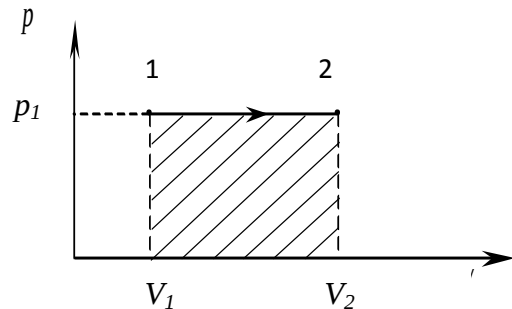


Рис. 1

Выясним физический смысл универсальной газовой постоянной R .

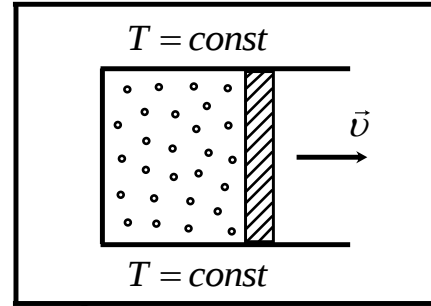
Из уравнения состояния идеального газа находим $p_1 V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1$, $p_2 V_2 = \nu \cdot R \cdot T_2$. Сравнивая это уравнение с (2), видим, что

$$A_{12} = \nu R (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Если $\Delta T = 1$ К и количество вещества газа равно одному молю, то работа $A = R$, т.е. универсальная газовая постоянная R численно равна работе расширения одного моля идеального газа, когда он нагревается на один кельвин при постоянном давлении.

Работа при изотермическом расширении идеального газа

Для осуществления изотермического расширения газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем, температура стенок цилиндра должна поддерживаться постоянной с помощью термостата (рис.2), а поршень должен перемещаться настолько медленно, чтобы газ все время находился в тепловом равновесии со стенками.



Термостат

Рис.2

При изотермическом расширении количество теплоты, получаемое газом от термостата, равно работе, совершаемой газом: $\delta Q = \delta A$. Это следует из уравнения $\delta Q = \nu C_V dT + \delta A$ при $T = const$.

Из уравнения состояния идеального газа

$$p = \nu \frac{RT}{V}. \quad (4)$$

Тогда работа при изотермическом процессе ($T = const$) рассчитывается как:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1).$$

Окончательно получаем

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5)$$

Если учесть, что $V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1}$ и $V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2}$, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu RT_2}{p_2} \cdot \frac{p_1}{\nu RT_1} = \frac{p_1}{p_2}$.

Это же самое можно получить из уравнения изотермического процесса

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \text{ тогда } p_1 / p_2 = V_2 / V_1.$$

Т.о. получаем другую формулу для работы газа при изотермическом процессе

$$A_{12} = \nu RT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right). \quad (6)$$

Работа при адиабатном процессе

Работу расширения газа при адиабатном процессе найдем, подставив в (1) давление $p = \frac{const}{V^\gamma}$. Константу можно найти из уравнения адиабатного процесса, положив ее равной произведению $p_1 V_1^\gamma$ в начальном состоянии 1:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \\ &= p_1 V_1^\gamma \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{p_1 V_1 V_1^{\gamma-1}}{\gamma-1} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} (1 - V_1^{\gamma-1} V_2^{1-\gamma}) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \right). \end{aligned}$$

Т.о.

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (7)$$

С учетом $p_1 V_1 = \nu R T_1$, можно написать и другую формулу

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (8)$$

Так как $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ имеем $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1}$ или $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1}$, т.е.

$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$ или $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{\nu R T_2}{\nu R T_1}$. Тогда $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$ и можем переписать (8)

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{\nu R}{\gamma-1} [T_1 - T_2]. \quad (9)$$

Заметим, что из первого начала термодинамики следует, что $\delta A = -dU$, но $dU = \nu C_V dT$, следовательно

$$A_{12} = -\int \nu C_V dT = -\nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V (T_1 - T_2). \quad (10)$$

Другие частные случаи

Вначале данной лекции было сказано, что формула для работы, которую выполняет газ, имеет вид

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что работа определяется площадью криволинейной трапеции в осях (p, V) . Т.о., в общем случае, для нахождения работы нужно производить интегрирование. Однако в ряде задач вычисление площади можно произвести из элементарных геометрических рассуждений. Пусть идеальный газ переходит из состояния 1 в состояние 2 в осях (p, V) вдоль прямой линии.

Из рисунка видно, что фигура под прямой представляет собой трапецию, следовательно для того чтобы вычислить работу газа необходимо найти площадь этой трапеции. Для этого заметим, что трапеция 12AB имеет следующие размеры (см.рис)

$$AB = 2C = 60 - 30 = 30 \text{ см}^3 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 ,$$

$$1C = 700 - 200 = 500 \text{ кПа} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па} ,$$

$$BC = 200 \text{ кПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па} ,$$

$$1B = 700 \text{ кПа} = 7 \cdot 10^5 \text{ Па} ,$$

$$2A = 200 \text{ кПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па} .$$

Площадь треугольника 12C равна

$$S_{\Delta} = 2C \cdot 1C / 2 = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^5 / 2 = 7,5 \text{ Дж} .$$

Площадь прямоугольника C2AB равна

$$S_{C2AB} = BC \cdot AB = 2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 6 \text{ Дж} .$$

Полная работа, которую выполняет газ, определяется как сумма этих двух площадей

$$A_{12} = S_{\Delta} + S_{C2AB} = 13,5 \text{ Дж} .$$

