

Лекция №3

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции позволяет вычислять индукцию магнитного поля, созданного совокупностью токов, текущих по проводам.

Циркуляцией C вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл по этому контуру от скалярного произведения $\vec{B}$ на элемент контура $d\vec{l}$

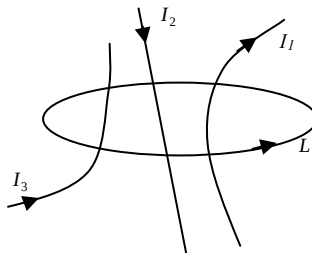
$$C = \oint_L \vec{B} d\vec{l}.$$

Интегрирование по контуру предполагает, что значения подынтегральной функции берутся в точках этого контура. Кругок на значке интеграла означает, что контур L замкнутый.

Формулировка теоремы: *циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0* :

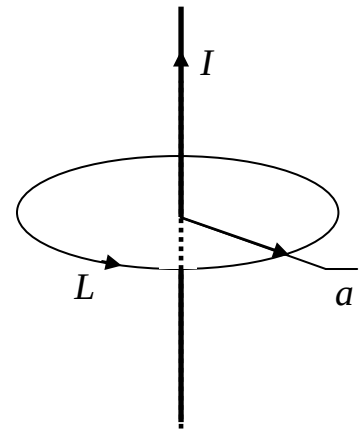
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k.$$

Положительными считаются токи, направление которых связано с направлением обхода контура правилом правого винта (токи I_1 и I_3 на рис.1), отрицательными – токи, текущие в обратном направлении.



Магнитное поле бесконечного прямого тока

Найдем с помощью теоремы о циркуляции магнитное поле, созданное бесконечным прямым проводником с током (рис.3). В качестве контура интегрирования L возьмем одну из линий магнитной индукции $\vec{B}$, представляющую собой окружность радиуса a . Поскольку элемент контура $d\vec{l}$ в каждой его точке имеет то же направление, что и вектор $\vec{B}$, косинус угла между ними равен единице и скалярное произведение векторов $\vec{B}d\vec{l}$ превращается в произведение их модулей: $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. Кроме того, модуль вектора $\vec{B}$ имеет постоянное значение во всех точках контура, поскольку все они равноудалены от проводника. Тогда, левая часть теоремы о циркуляции дает:



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi a \cdot B,$$

где $2\pi a$ - длина окружности.

Для правой части получаем:

$$\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k = \mu_0 I,$$

так как ток один.

Откуда

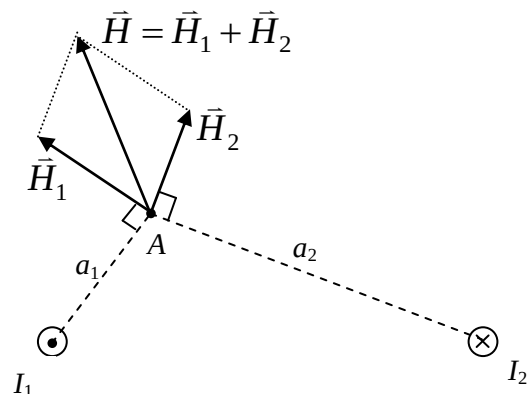
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

что совпадает с полученным ранее выражением (см. предыдущую лекцию).

Напомним, что направление магнитной индукции или напряженности магнитного поля определяется по правилу правого винта:

- 1) совмещаем поступательное движение правого винта с направлением тока,
- 2) тогда, вращательное движение винта покажет направление силовых линий магнитного поля.

В частности изобразим напряженность магнитного поля в точке А от двух бесконечных прямых токов направленных перпендикулярно к плоскости листа к «нам» - ток I_1 и от «нас» - ток I_2 .



Магнитное поле соленоида

Соленоидом называется система круговых токов, центры которых лежат на одной оси, которая называется осью соленоида.

Проще говоря, это цилиндрическая катушка, состоящая из намотанных вплотную друг к другу (*виток к витку*) проводников.

Рассмотрим длинный соленоид, осевое сечение которого показано на рис.4 (кружочки обозначают сечение провода, намотанного на катушку).

Чтобы применить теорему о циркуляции, контур интегрирования L выберем в виде прямоугольника $abcd$, расположенного в плоскости осевого сечения, у которого стороны ab и cd длиной l параллельны оси соленоида, а bc и ad – перпендикулярны ей. Направление обхода контура указано стрелками. Контур охватывает N витков провода, в которых ток I направлен за плоскость чертежа (от «нас»), т. е. имеет положительный знак.

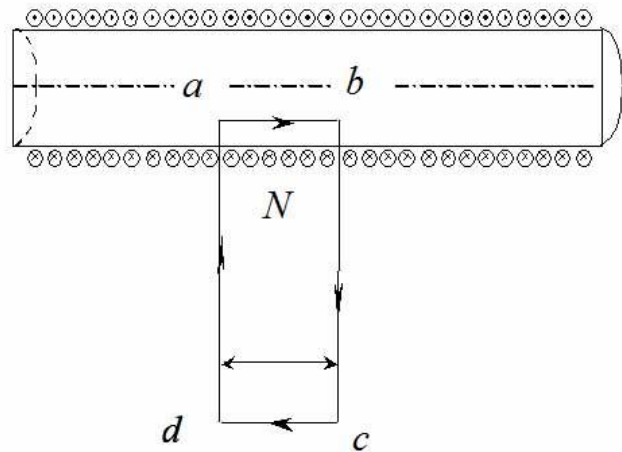


Рис.4

Согласно теореме о циркуляции

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI$$

Интеграл по замкнутому контуру L можно представить в виде суммы интегралов по каждой из его сторон:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} d\vec{l}.$$

В первом из них векторы $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ совпадают по направлению и поэтому $\vec{B} d\vec{l} = B dl$. Кроме того, в силу параллельности стороны ab оси соленоида, модуль $\vec{B}$ имеет на ней постоянное значение. Тогда

$$\int_a^b \vec{B} d\vec{l} = \int_a^b B dl = B \int_a^b dl = B \cdot l.$$

Интегралы по сторонам контура bc и da обращаются в нуль, поскольку векторы $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ на них перпендикулярны друг другу и скалярное произведение $\vec{B} d\vec{l} = 0$. Четвертый интеграл – по линии cd – можно положить равным нулю, т.к. вдали от длинного соленоида индукция поля B очень мала.

Окончательно получим

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \cdot l = \mu_0 NI,$$

откуда

$$B = \mu_0 nI,$$

где $n = N/l$ число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины (*плотность намотки*).

Заметим, что плотность намотки определяется только диаметром провода. Так как длина соленоида определяется количеством витков $l = N \cdot d$, то для плотности намотки имеем:

$$n = N/l = N/(N \cdot d) = 1/d,$$

где d - диаметр провода.

Очевидно, что плотность намотки измеряется в обратных метрах $[n] = 1/\text{м}$.

Из полученной формулы следует, что внутри длинного соленоида вдали от его концов магнитное поле *однородно*. Индукция поля B пропорциональна линейной плотности числа витков соленоида и силе тока в его обмотке.

Заметим, что полученная формула справедлива для тонкого длинного соленоида. Иногда говорят для бесконечно длинного соленоида или *идеального соленоида*.

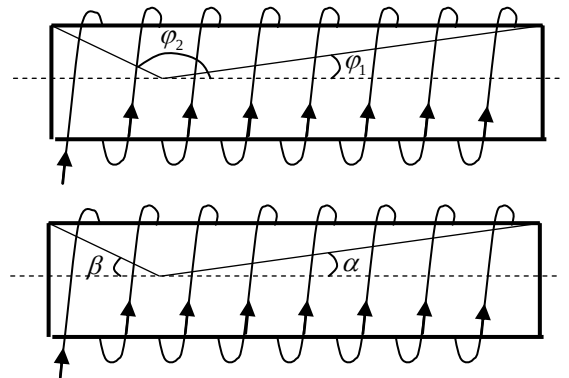
Магнитное поле соленоида конечной длины можно найти из закона Био-Савара-Лапласа. Напряженность магнитного поля на оси такого соленоида определяется выражением

$$H = \frac{nI}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 - углы, под которыми видны торцы соленоида (рис.).

Или

$$H = \frac{nI}{2} (\cos \alpha + \cos \beta).$$



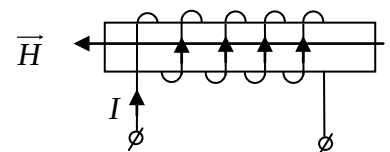
Согласно этим выражениям напряженность магнитного поля имеет максимальное значение в центре соленоида, а у его торцов уменьшается. Если устремить длину соленоида к бесконечности, то $\varphi_1 \rightarrow 0$, а $\varphi_2 \rightarrow 180^\circ$ (либо $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$), что приводит к выражению

$$H = \frac{nI}{2} (\cos 0 + \cos 0) = \frac{nI}{2} (1 + 1) = nI,$$

что совпадает с ранее полученной формулой.

Направление напряженности магнитного поля определяют по правилу правого винта:

- 1) правый винт вращают по направлению тока,
- 2) поступательное движение винта укажет направление напряженности магнитного поля (магнитной индукции).



Магнитное поле тороида

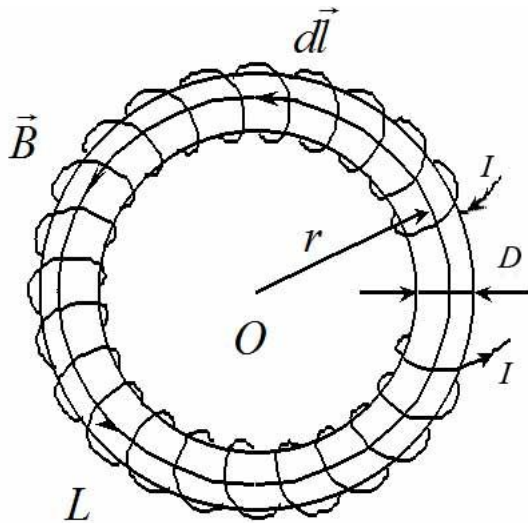


Рис.

Обратимся теперь к *тороиду*, изображенному на рис, который представляет собой соленоид, согнутый в кольцо (геометрическая фигура – *тор*). Линии индукции магнитного поля $\vec{B}$ являются концентрическими окружностями с центрами на оси симметрии тороида, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа. Одну из этих окружностей – радиусом r – возьмем в качестве контура интегрирования L . Векторы $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ в каждой точке этой окружности параллельны друг другу, поэтому $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. Кроме того,

модуль $\vec{B}$ на этой окружности имеет постоянное значение. С учетом сказанного выражение для циркуляции примет вид:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi r \cdot B.$$

Правая часть теоремы о циркуляции преобразуется как:

$$\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k = \mu_0 \sum_{k=1}^N I = \mu_0 I \sum_{k=1}^N 1 = \mu_0 IN,$$

так как каждый ток I_k равен одному и тому же току I , а N – число витков тороида. Отсюда

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Из этой формулы следует, что индукция магнитного поля тороида убывает с расстоянием r от его оси обратно пропорционально этому расстоянию.

В случае тонкого тороида, когда диаметр катушки $D \ll r$ (см. рис.), индукция магнитного поля в пределах тороида мало меняется с расстоянием и получается формула, аналогичная формуле для соленоида:

$$B = \mu_0 nI,$$

где $n = \frac{N}{2\pi r}$ – линейная плотность числа витков обмотки тороида.