

Лекция №3. **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС**

Рассмотрим колебания, которые совершает закрепленное на пружине тело, если на него кроме упругой силы и силы сопротивления действует еще добавочная периодическая сила. Эта сила, называемая *вынуждающей*, изменяется со временем по закону

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (1)$$

где F_0 – ее амплитуда, Ω – циклическая частота.

Уравнение движения (второй закон Ньютона) приобретает вид

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} + F_0 \cos \Omega t, \quad (2)$$

где m – масса тела, k – жесткость пружины, r – коэффициент сопротивления.

Разделив (2) на m , получим уравнение, отличающееся от уравнения затухающих колебаний правой частью:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (3)$$

Коэффициенты β и ω_0 обозначают соответственно *коэффициент затухания* и *собственную циклическую частоту колебаний* системы.

Полученное уравнение – неоднородное дифференциальное уравнение, т.е. его правая часть отлична от нуля. Поэтому его решение можно представить в виде суммы двух функций: общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Т.к. решение однородного уравнения пропорционально $e^{-\beta t}$, то при $t \rightarrow \infty$ оно обращается в нуль, поэтому искомое решение уравнения (3) сводится к частному решению, которое будем искать в виде периодической функции:

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \Phi), \quad (4)$$

изменяющейся с частотой вынуждающей силы Ω . Константы A и Φ могут быть найдены из уравнения (3). При этом A – амплитуда вынужденных колебаний, а Φ – сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением тела от положения равновесия.

Подставляя (4) в уравнение (3) и пользуясь диаграммным методом находим

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (5)$$

и

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6)$$

Уравнение (5) позволяет проанализировать зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы Ω . График этой зависимости показан на рис.1. Функция $A = A(\Omega)$ имеет максимум при

$$\Omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (7)$$

где $\omega_{рез}$ - называется резонансной частотой. При малом сопротивлении движению ($\beta \ll \omega_0$) $\omega_{рез}$ практически совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

Рассмотрим случай, когда частота вынуждающей силы $\Omega \rightarrow 0$. Тогда амплитуда вынужденных колебаний $A \rightarrow F_0 / m\omega_0^2$, а сдвиг фаз $\Phi = 0$. Полученное выражение называется **статическим отклонением**

$$A_{стат} = F_0 / m\omega_0^2.$$

Если частота вынуждающей силы Ω совпадает с частотой $\omega_{рез}$. Амплитуда вынужденных колебаний при этом становится максимальной (см. рис.1) и достигает значения

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (8)$$

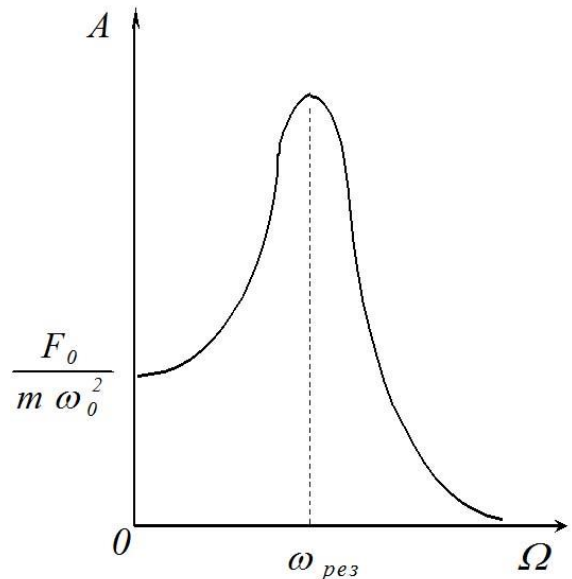


Рис.1

Мы имеем дело с явлением резонанса. *Резонансом называется резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы.*

Заметим, что в случае слабых затуханий $\beta \rightarrow 0$ резонансная амплитуда стремится к бесконечности $A_{рез} \rightarrow \infty$.

Вычислим отношение амплитуды при резонансе к амплитуде статического отклонения для слабых затуханий (т.е. $\omega_0 \gg \beta$)

$$\frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} \cdot \frac{m\omega_0^2}{F_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{2\pi/T}{2\delta/T} = \frac{\pi}{\delta} = Q,$$

т.е. добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда при резонансе превышает статическое отклонение под действием постоянной силы той же величины.

Закон Ома для синусоидальных переменных токов.

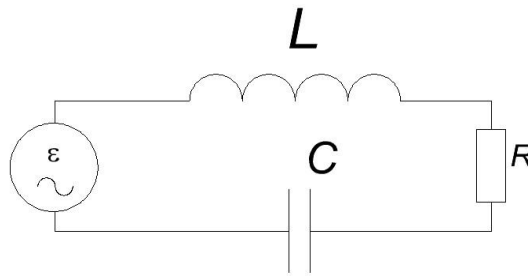


Рис.2

Будем считать, что ток квазистационарный (т.е. в данный момент времени во всех точках цепи величина тока одинаковая) и внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

$i(t) = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$ – количество заряда, которое протекает через сечение в единицу времени. Тогда (см. материал, изложенный ранее) данная система будет описываться следующим дифференциальным уравнением

$$L\ddot{q}(t) + \dot{q}(t)R + \frac{q(t)}{C} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Рассмотрим типичные случаи.

1. В цепи переменного тока только активное сопротивление R .

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\dot{q}R = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Т.е.

$$i(t) = \dot{q} = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos(\Omega t) = I_R \cos(\Omega t).$$

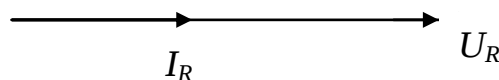
Напряжение на сопротивлении

$$u_R = i(t)R = \dot{q}R = U_R \cos(\Omega t),$$

где $U_R = I_R \cdot R$ - амплитуды тока и напряжения.

Т.е. колебания тока и напряжения происходят в одной фазе.

Векторная диаграмма имеет следующий вид



2. В цепи переменного тока только катушка индуктивностью L .

Тогда

$$L\ddot{q} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Так как $i = \dot{q}$, то имеем

$$L \frac{di}{dt} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Решить данное дифференциальное уравнение очень просто: разделяем переменные и интегрируем

$$L di = \varepsilon_0 \cos(\Omega t) dt \Rightarrow \int L di = \int \varepsilon_0 \cos(\Omega t) dt \Rightarrow L \cdot i = \frac{\varepsilon_0}{\Omega} \sin(\Omega t).$$

Так как $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$, то имеем

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{\Omega L} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_L \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\frac{\varepsilon_0}{\Omega L} = I_L$ - максимальный ток проходящий через катушку индуктивности в данном случае.

Сравнивая это выражение с обычным законом Ома видим, что выражение ΩL имеет смысл сопротивления и его называют:

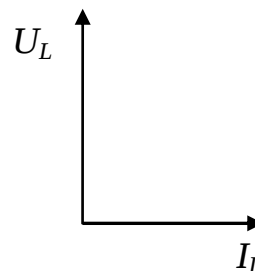
реактивное сопротивление катушки индуктивности $X_L = \Omega L$.

Напряжение на катушке u_L , в данном случае, совпадает с ЭДС

$$\begin{cases} i_L(t) = I_L \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \\ u_L(t) = U_L \cos(\Omega t) \end{cases}$$

где $U_L = I_L \cdot \Omega L = I_L \cdot X_L$. Поэтому говорят, что на катушке индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на $\pi/2$ радиан.

Имеем следующую векторную диаграмму



3. В цепи переменного тока только конденсатор емкостью C .

Тогда имеем уравнение

$$\frac{q(t)}{C} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Так как, то

$$i = \dot{q} = \frac{d}{dt}(\varepsilon_0 \cdot C \cdot \cos(\Omega t)) = -\varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) = \varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \sin(-\Omega t).$$

Учтем, что $\sin(-\alpha) = \cos(-\alpha - \pi/2) = \cos(\alpha + \pi/2)$, получаем

$$i = \varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_C \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Используя закон Ома, видим, что электрическое сопротивление конденсатора X_C равно

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_C} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 \cdot \Omega \cdot C} = \frac{1}{\Omega \cdot C}$$

и называется – **реактивное сопротивление конденсатора** $X_C = \frac{1}{\Omega \cdot C}$.

Так как напряжение на конденсаторе $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$, то

$$u_C(t) = U_C \cos(\Omega t),$$

где $U_C = \frac{I_C}{\Omega \cdot C} = I_C \cdot X_C$.

Вспоминая, что ток через конденсатор определяется выражением

$$i = I_C \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

видим, что ток по фазе опережает напряжение на $\pi/2$ радиан.

Имеем следующую векторную диаграмму.



4. Последовательное соединение в цепи переменного тока R, L, C .

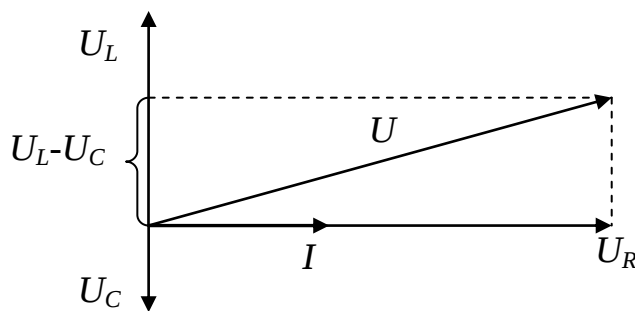
В данном случае имеем следующее дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q}(t) + \dot{q}(t)R + \frac{q(t)}{C} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t).$$

Заметим, что и катушка, и конденсатор сдвигают фазу на $\frac{\pi}{2}$ только в разные стороны. На активном сопротивлении колебания тока и ЭДС синфазные. На катушке фазы колебаний сдвигаются на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. На конденсаторе фазы колебаний сдвигаются на $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ток одинаков для катушки, сопротивления, конденсатора:

$$I_R = \frac{\varepsilon}{R}, I_{0R} = \frac{U_{0R}}{R}, U_{0R} = I_{0R} R.$$

Поэтому общее амплитудное значение напряжения найдем, построив следующую диаграмму



Таким образом, общее напряжение определяется выражением

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

Подставим сюда выражения полученные выше:

$$U_R = I_R \cdot R,$$

$$U_L = I_L \cdot X_L,$$

$$U_C = I_C \cdot X_C.$$

Так как сопротивление, конденсатор и катушка индуктивности соединены последовательно, то ток через них течет один и тот же $I = I_R = I_L = I_C$, то мы получаем

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Множитель у тока называют полным сопротивлением Z , т.о.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Тангенс угла сдвига фаз между амплитудным значением тока и полным напряжением можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$