

Задача № 1. Угарный газ в количестве 2 молей адиабатически расширяется, при этом его температура уменьшается на 50°C , а затем его давление изохорно увеличивается и становится на 30% больше первоначального. Найти давление температуру и объем газа в конечном состоянии. Начальное давление газа составляет 4 МПа и его объем равен 2 л. Изобразить график процесса в осях (p, V) .

СО - угарный газ
 $\nu = 2 \text{ моля}$
 $\Delta T = T_1 - T_2 = 50^{\circ}\text{C} = 50\text{K}$
 $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$ (адиабата)
 $P_3 = 1,3P_1$
 $V_2 = V_3$
 $P_1 = 4 \text{ МПа} = 4 \cdot 10^6 \text{ Па}$
 $V_1 = 2 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$

$P_3, T_3, V_3 - ?$

Первоначальную температуру газа найдем из

$$P_1 V_1 = \nu R T_1, \text{ тогда } T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R}.$$

Дальше воспользуемся уравнением адиабатного процесса $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}, \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$

$$P_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma}, \quad \text{где } \gamma = 1 + \frac{2}{i} \quad - \text{показатель}$$

адиабаты, а i - число степеней свободы молекулы газа. Так как нам дана двухатомная молекула СО, то $i = 5$, а, следовательно $\gamma = 1 + 2/5 = 1,4$.

Из выражения $P_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma}$ находим

$$P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 \left(\frac{T_1}{T_1 - \Delta T} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 \left(\frac{1}{1 - \Delta T / T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Подставляя выражение для T_1 имеем $P_2 = P_1 \left(\frac{1}{1 - \Delta T \nu R / P_1 V_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$

Далее (для упрощения выкладок) будем считать численно.

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 481\text{K}.$$

$$T_2 = T_1 - \Delta T = 481 - 50 = 431\text{K}.$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{1}{1 - \Delta T / T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 4 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{1 - 50 / 481} \right)^{-1,4/0,4} = 4 \cdot 10^6 \cdot 1,116^{-3,5} =$$

$$= 4 \cdot 10^6 \cdot 0,681 = 2,72 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Второй объем найдем из $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$, тогда

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/\gamma} = 2 \cdot 10^{-3} \left(\frac{4}{2,72} \right)^{1/1,4} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,47^{0,714} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,317 = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

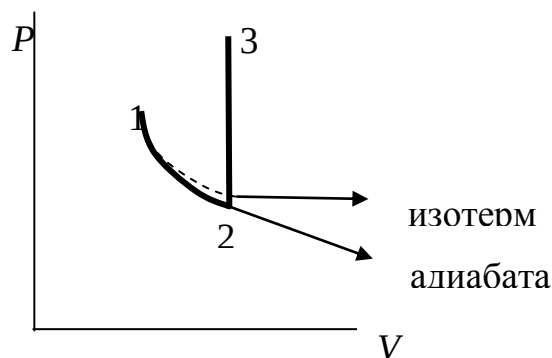
В силу того, что второй процесс изохорный имеем $V_3 = V_2 = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

По известным данным $P_3 = 1,3P_1 = 1,3 \cdot 4 \cdot 10^6 = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Температуру третьего состояния найдем из уравнения изохорного процесса

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}. \text{ Тогда } T_3 = T_2 \frac{P_3}{P_2} = 431 \frac{5,2}{2,72} = 824\text{K}.$$

Изобразим график этих процессов.



Задача №2. Газ из первого состояния расширяется изотермически во второе, а затем в соответствии с графиком в третье. Найти работу, которую выполнил газ за два процесса.

Из графика находим

$$V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T_1 = T_2$$

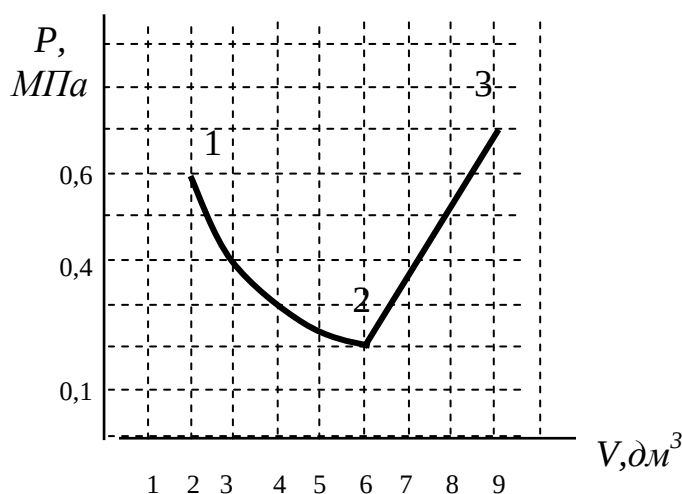
$$V_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$P_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$V_3 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$P_3 = 7 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$A_{13} = ?$$



Работа определяется как площадь под кривой. Очевидно $A_{13} = A_{12} + A_{23}$.

Для изотермического процесса имеем

$$A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Процесс $(2 \rightarrow 3)$ не имеет названия, а работу вычислим как площадь трапеции, которая состоит из прямоугольника и треугольника. Т.о.

$$A_{23} = P_2(V_3 - V_2) + \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 - P_2) = (V_3 - V_2)\left(P_2 + \frac{P_3 - P_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 + P_2)$$

Проверка по размерности этих формул элементарна. Т.к. выражение под логарифмом безразмерное, а все остальные слагаемые имеют вид

$$[PV] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Окончательно

$$A_{13} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{2}(V_3 - V_2)(P_3 + P_2) = 12 \cdot 10^2 \ln 3 + 1,5 \cdot 9 \cdot 10^2 = 26,7 \cdot 10^2 \text{ Дж}.$$

Задача №3. 0,5 молей водорода находится при температуре 300К. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию всех молекул этого газа.

H_2 - водород	Из закона распределения энергии по степеням свободы, на каждую степень свободы приходится $E_{вр} = \frac{i}{2} kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$ постоянная Больцмана.
$m_{сплава} = 1,2г = 1,2 \cdot 10^{-3} кг$	
$E_{вр} - ? E_k - ?$	Т.к водород 2-х атомная молекула, то она имеет 3 степени свободы поступательного движения и

2 степени свободы вращательного движения $i = 2 + 3 = 5$.

Тогда средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода выражается формулой

$$E_{вр} = \frac{2}{2} kT = kT$$

$$\text{размерность } [E_{вр}] = \frac{Дж \cdot К}{К} = Дж.$$

Окончательно $E_{вр} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 414 \cdot 10^{-23} = 4,14 \cdot 10^{-21} Дж$ - энергия вращательного движения.

А суммарная кинетическую энергию E_k всех молекул определяют по формуле

$$E_k = \frac{i}{2} \nu RT, \text{ т.к молекула водорода двух атомная, то } i = 5$$

Перепишем формулу

$$E_k = \frac{5}{2} \nu RT$$

Вычислим, подставляя данные

$$E_k = \frac{5}{2} 0,5 \cdot 8,31 \cdot 300 = 3116,25 Дж$$

Проверка на размерность

$$[E_{вр}] = \text{моль} \frac{Дж \cdot К}{К \cdot \text{моль}} = Дж$$

Задача №4. Определить увеличение внутренней энергии количество теплоты и работу расширения 30г азота при постоянном давлении, если его объем увеличился в 5 раз. Начальная температура 270К.

N_2 - азот $m = 30г = 30 \cdot 10^{-3} кг$ $T_1 = 270K$ $\frac{V_2}{V_1} = 5$ $\Delta U - ?$ $A - ?$ $\Delta Q - ?$ $t^{\circ}C - ?$	При постоянном давлении выполняется закон Гей-Люссака $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$ Из таблицы Менделеева находим $\mu = 2(14) \cdot 10^{-3} кг / моль = 28 \cdot 10^{-3} кг / моль.$ Определим конечную температуру $T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1}$
---	---

Вычислим подставляя данные $T_2 = 5 \cdot 270 = 1350K$.

Проверка по размерности

$$[T] = \frac{м^3 \cdot K}{м^3} = K$$

По определению изменение внутренней энергии вычисляется по формуле

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \Delta T, \text{ где } i \text{ — число степеней свободы (} i = 5, \text{ для азота)}$$

Вычислим изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{30 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} 8,31 \cdot (1350 - 270) = 24040 = 24 \cdot 10^3 Дж$$

Проверка на размерность

$$\Delta U = \frac{кг}{кг / моль} \cdot \frac{Дж}{моль \cdot K} \cdot K = Дж$$

Для изобарного процесса работа определяется по формуле

$$A = P \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$$

Проверка на размерность

$$A = \frac{кг}{кг / моль} \cdot \frac{Дж}{моль \cdot K} \cdot K = Дж$$

Вычислим, подставляя числовые данные

$$A = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} 8,31 \cdot (1350 - 270) = 9616 Дж = 9,616 \cdot 10^3 Дж$$

Используя первый закон термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$

$$\Delta Q = 9,616 \cdot 10^3 + 24,040 \cdot 10^3 = 33,656 \cdot 10^3 Дж$$

Задача № 5. Водород массой 40г, при температуре 300К, адиабатично расширяется, увеличив объем в 3 раза. Потом при изотермичном сжатии объем газа уменьшился в 2 раза. Определить полную работу, которую выполнил газ, и конечную температуру газа.

H_2 - водород	1-2 процесс адиабатический
$V_2 = 3V_1$	2-3 процесс изотермический
$T_1 = 300K$	Уравнение адиабаты имеет вид $TV^{\gamma-1} = const$, тогда для процесса 1-2 запишем уравнение в виде
$\frac{V_2}{V_3} = 2$	
$A - ?$	$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$ где $i = 5$ - число степеней свободы для водорода (т.к водород
$T_2 - ?$	двухатомный газ)
$\rho, m - ?$	

Получаем $\gamma = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$.

Из уравнения адиабаты

$$T_2 = \frac{T_1 V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = \frac{T_1}{(\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1}}$$

Численный расчет $T_2 = \frac{300}{3^{1,4-1}} = 193,3K$.

Работа общая вычисляется по формуле

$A_{общ} = A_{12} + A_{23}$, где A_{12} - работа при адиабатическом процессе
 A_{23} - работа при изотермическом процессе

Применим формулы для вычисления работ в этих процессах
 Для адиабатического процесса

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M} \left[\left(1 - \left(\frac{V_1}{3V_1} \right)^{\gamma-1} \right) \right]$$

Из таблицы Менделеева молярная масса $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$

Вычислим работу для адиабатического процесса

$$A = \frac{8,31 \cdot 300}{1,4 - 1} \cdot \frac{0,04}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{1,4-1} \right) \right] = 44874 \text{ Дж}$$

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = -R \cdot T_2 \frac{m}{M} \ln \frac{V_3}{V_2}$$

Вычислим работу при изотермическом процессе

$$A = -8,31 \cdot 193,3 \frac{0,04}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 2 = -22169,55 \text{ Дж}$$

Общая работа $A = 44874 - 22169,55 = 22707,45 \text{ Дж} = 22,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.

Задача №6. Идеальная тепловая машина, которая работает по циклу Карно, применяется для поднятия в резервуаре температуры до 250К при температуре окружающей среды 27°C. За один цикл от резервуара отводится 3,15кДж теплоты. Какая механическая работа необходима для выполнения одного цикла?

$$t_1 = 27^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 250\text{K}$$

$$Q_2 = 3,15\text{кДж} = 3,15 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$A = ?$$

По определению КПД $\eta = \frac{A}{Q_1}$, где

$A = Q_1 - Q_2$, тогда $Q_1 = A + Q_2$, где Q_1 - количество теплоты, полученное от нагревателя,

Q_2 - количество теплоты, отданное холодильнику.

A - работа, машины за один цикл.

Для идеальной тепловой машины КПД определяют по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Приравняем формулы для КПД $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, преобразуем $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$,

где $T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300\text{K}$ - температура нагревателя

T_2 - температура холодильника.

Определим количество теплоты Q_1

$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ тогда подставляя $Q_1 = \frac{Q_2 T_1}{T_2}$ в формулу для работы, получим

$$A = \frac{Q_2 T_1}{T_2} - Q_2 = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right).$$

Вычислим, подставляя числовые данные

$$A = 3,15 \cdot 10^3 \left(\frac{300}{250} - 1 \right) = 3,15 \cdot 10^3 \cdot 0,2 = 630 \text{ Дж}$$

Проверка на размерность $[A] = \text{Дж} \left(\frac{\text{K}}{\text{K}} - 1 \right) = \text{Дж}.$